UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

ESCUELA DE POSGRADO

Programa de Doctorado en Matemática

“Existencia y unicidad de la solución débil de un problema de contacto tipo p(x)-KIRCHHOFF”

Tesis para optar el grado académico de
Doctor en Matemática

Autor:

Mg. Barahona Martinez, Willy David
Código ORCID: 0000-0001-9177-1561

Asesor:

Dr. Morales Marchena, Herón Juan
Código ORCID: 0000-0002-5394-0958
DNI. N° 32837715

Línea de Investigación
Ecuaciones diferenciales y análisis numérico

Nuevo Chimbote - PERÚ
2024

CERTIFICACIÓN DEL ASESOR

Yo, **Dr. Morales Marchena, Herón Juan,** mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: **"Existencia y unicidad de la solución débil de un problema de contacto del tipo p(x)-KIRCHHOFF"**, Que tiene como autor al **Mg. Barahona Martínez, Willy David,** ha sido elaborado de acuerdo al Reglamento de Normas y Procedimientos para obtener el Grado de **Doctor en Matemática** de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, junio del 2024

....

Dr. Morales Marchena, Herón Juan

Asesor

Código. ORCID: 0000-0002-5394-0958

DNI N°: 32837715

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

La tesis: **"Existencia y unicidad de la solución débil de un problema de contacto del tipo p(x)-KIRCHHOFF"**, que tiene como autor al **Mg. Barahona Martínez, Willy David,** alumno del doctorado en **Matemática** en la escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Tesis para Obtener el grado de Doctor en Matemática

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

....

Dr. Cedrón León, Ernesto Antonio
Presidente
Código. ORCID: 0000-0002-3198-831X
DNI N°: 32966495

....

Dr. Moore Flores, Teodoro
Secretario
Código ORCID: 0000-0002-1755-3459
DNI N° 32763522

....

Dr. Morales Marchena, Herón Juan
Vocal
Código. ORCID: 0000-0002-5394-0958
DNI N°: 32837715

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

A los cinco días del mes de junio del año 2024, siendo las 11:30 horas, en el aula P-01 de la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador, designados mediante Resolución Directoral Nº 253-2024-EPG-UNS de fecha 13.05.2024, conformado por los docentes: Dr. Ernesto Antonio Cedrón León (Presidente), Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez (Secretario) y Dr. Herón Juan Morales Marchena (Vocal); con la finalidad de evaluar la tesis titulada ***"EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA DE CONTACTO DEL TIPO p(x)-KIRCHHOFF";*** presentado por el tesista **Willy David Barahona Martínez,** egresado del programa de **Doctorado en Matemática.**

Que, por motivos personales el Dr. Miltón Milciades Cortez Gutiérrez (Secretario) no pudo asistir a la sustentación por lo que el Dr. Teodoro Moore Flores (Accesitario) asume funciones como **secretario**.

Sustentación autorizada mediante Resolución Directoral N° 306-2024-EPG-UNS de fecha 03 de junio de 2024.

El presidente del jurado autorizó el inicio del acto académico; producido y concluido el acto de sustentación de tesis, los miembros del jurado procedieron a la evaluación respectiva, haciendo una serie de preguntas y recomendaciones al tesista, quien dio respuestas a las interrogantes y observaciones.

El jurado después de deliberar sobre aspectos relacionados con el trabajo, contenido y sustentación del mismo y con las sugerencias pertinentes, declara la sustentación como APROBADO, asignándole la calificación de VEINTE.

Siendo las 12:55 horas del mismo día se da por finalizado el acto académico, firmando la presente acta en señal de conformidad.

Dr. Ernesto Antonio Cedrón León
Presidente

Dr. Teodoro Moore Flores
Secretario

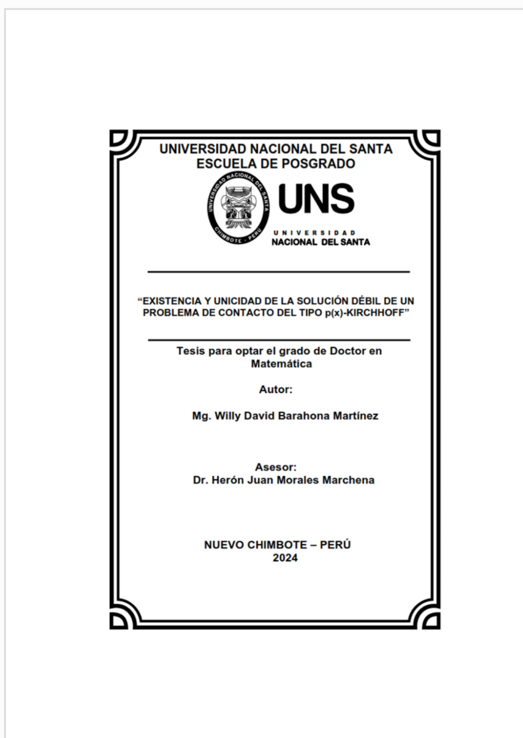
Dr. Herón Juan Morales Marchena
Vocal

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Willy Barahona Martinez
Título del ejercicio:	tesis
Título de la entrega:	TESIS UNS WBARAHONA ABRIL 2024.pdf
Nombre del archivo:	TESIS_UNS_WBARAHONA_ABRIL_2024.pdf
Tamaño del archivo:	950.84K
Total páginas:	79
Total de palabras:	16,101
Total de caracteres:	67,325
Fecha de entrega:	29-abr.-2024 08:55p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre...	2366236731


UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO

UNS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

"EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA DE CONTACTO DEL TIPO p(x)-KIRCHHOFF"

Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática

Autor:

Mg. Willy David Barahona Martínez

Asesor:
Dr. Herón Juan Morales Marchena

NUEVO CHIMBOTE – PERÚ
2024

TESIS UNS WBARAHONA ABRIL 2024.pdf

INFORME DE ORIGINALIDAD

23%	24%	8%	5%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	dspace.sti.ufcg.edu.br:8080 Fuente de Internet	6%
2	www.dme.ufcg.edu.br Fuente de Internet	4%
3	etamaths.com Fuente de Internet	3%
4	hdl.handle.net Fuente de Internet	3%
5	repositorio.uns.edu.pe Fuente de Internet	1%
6	cybertesis.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	1%
7	www.ppgme.propesp.ufpa.br Fuente de Internet	1%
8	www.mat.ufcg.edu.br Fuente de Internet	1%
9	vrip.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	1%

DEDICATORIA

Dedico esta tesis de Doctorado a mi maestra, tutora y guía, Lucía Mercedes Ponte Márquez, en la Escuela Nacional de Primaria N° 20170 del distrito de OMAS, provincia de Yauyos, región Lima; también, a mis padres, David y Bernardina y, a mis abuelos: Félix, Sofía, Pedro y Beatríz, quienes desde mi infancia me guiaron y me brindaron un apoyo inquebrantable y motivación para alcanzar mis objetivos y metas.

AGRADECIMIENTOS

Al concluir este largo trayecto hacia la culminación de mi tesis doctoral, me siento profundamente agradecido y emocionado por el apoyo incondicional que he recibido durante este recorrido académico. En primer lugar, quiero expresar mi gratitud a Dios por su guía y fortaleza, que han sido fundamentales para superar los desafíos que se han presentado en el camino. Su amor constante y dirección han sido mi mayor sustento durante este proceso.

Quiero agradecer también a los profesores de la UNMSM, especialmente al Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, cuya dedicación y sabiduría han sido esenciales en mi formación académica. Su orientación experta y valiosas sugerencias han enriquecido enormemente esta tesis. A los docentes de la Universidad Nacional del Santa, y de forma especial a mi asesor de tesis, el Dr. Herón Juan Morales Marchena, y a mis queridos compañeros de estudios, les agradezco por compartir este camino conmigo, por su apoyo mutuo y por las enriquecedoras discusiones que hemos tenido juntos. Vuestra camaradería ha hecho este trayecto mucho más llevadero y enriquecedor.

Quiero dedicar unas palabras de profundo agradecimiento a mi compañera de vida, Rocío Julieta. Tu constante apoyo, paciencia y comprensión han sido mi mayor fortaleza. Tus palabras de aliento y tu amorosa presencia han sido el motor que me ha impulsado a seguir adelante incluso en los momentos más difíciles. Gracias por creer en mí y por ser mi mayor motivación.

A mis adorables hijos, Sofía y Daniel, les agradezco por ser mi luz en los días oscuros y por recordarme constantemente el verdadero propósito de este esfuerzo: construir un futuro mejor para ustedes. Vuestra alegría y amor incondicional han sido mi mayor inspiración. A todos ustedes, les estoy eternamente agradecido. Este logro no solo es mío, sino de todos los que han sido parte de este viaje conmigo, de manera especial mis hermanos Mauro, Nelly, César, Dora y Esther, así como mis primos Juvenal y Andrés. Espero que este sea solo el comienzo de muchos éxitos compartidos en el futuro.

Con todo mi cariño y gratitud, WILLY DAVID.

Índice general

RESUMEN

Existencia y unicidad de la solución débil de un problema de contacto del tipo $p(x)$-Kirchhoff

Willy David, Barahona Martínez

Junio - 2024

Asesor : Dr. Herón Juan Morales Marchena.

Grado obtenido : Doctor en Matemática.

Estudiamos un problema de contacto por fricción del tipo $p(x)$ - Kirchhoff. Mediante una técnica de multiplicador abstracto de Lagrange y el teorema del punto fijo de Schauder (TPF Schauder) establecemos la existencia de soluciones débiles. En este trabajo de tesis consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ suficientemente regular tal que $med(\Gamma_i) > 0$, $i = 1, 2, 3$; ν es el vector normal exterior donde $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$, M una función localmente Lipschitz continua y las funciones f_1, f_2 y g definidas convenientemente para objeto del estudio, asi como el funcional

$$L(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left|\nabla u\right|^{p(x)} dx$$

$$(I) \qquad \left| \begin{array}{l} -M\big(L(u)\big)\Delta_{p(x)} u = f_1(x,u), \quad \text{en } \Omega. \\ \\ u = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1. \\ M\big(L(u)\big)\left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f_2(x), \quad \text{sobre } \Gamma_2. \\ M\big(L(u)\big)\left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leq g(x), \quad \text{sobre } \Gamma_3. \\ M\big(L(u)\big)\left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(x)\dfrac{u(x)}{|u(x)|}, \quad \text{si } u \neq 0 \text{ sobre } \Gamma_3. \end{array} \right.$$

para $2 \leq p(x) \leq +\infty$.

Palabras clave:

Problema de contacto por fricción, solución débil, problema $p(x)$ - Kirchhoff, teorema del punto fijo de Schauder, multiplicador abstracto de Lagrange.

ABSTRACT

Existence and uniqueness of the weak solution of a contact problem of the type $p(x)$-Kirchhoff

Willy David, Barahona Martínez

June - 2024

Adviser : Dr. Herón Juan Morales Marchena.

Obtained : Doctor in Mathematics.

We consider a class of frictional contact problem of the type $p(x)$ - Kirchhoff. Using an abstract Lagrangian multiplier technique and Schauder's fixed point theorem we establish the existence of weak solutions. In this thesis work we consider $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ a bounded domain with boundary $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ sufficiently regular such that $med(\Gamma_i) > 0$, $i = 1, 2, 3$; ν is the exterior normal vector where $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$, M a locally continuous Lipschitz function and the functions f_1, f_2 and g conveniently defined for the purpose of the study, as well as the functional

$$L(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left|\nabla u\right|^{p(x)} dx$$

$$(I) \quad \left| \begin{array}{l} -M\big(L(u)\big)\Delta_{p(x)} u = f_1(x,u), \quad \text{in } \Omega. \\ \\ u = 0, \quad \text{on } \Gamma_1. \\ M\big(L(u)\big)\left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f_2(x), \quad \text{on } \Gamma_2. \\ M\big(L(u)\big)\left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leq g(x), \quad \text{on } \Gamma_3. \\ M\big(L(u)\big)\left|\nabla u\right|^{p(x)-2} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(x)\dfrac{u(x)}{|u(x)|}, \quad \text{si } u \neq 0 \text{ on } \Gamma_3. \end{array} \right.$$

for $2 \leq p(x) \leq +\infty$.

Keywords:

Friction contact problem, weak solution, $p(x)$ problem - Kirchhoff, Schauder fixed point theorem, abstract Lagrange multiplier.

1 Problema de Investigación

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA DE CONTACTO DEL TIPO $p(x)$-KIRCHHOFF

1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

Indudablemente, los desafíos asociados al contacto son de gran relevancia en distintos campos como la industria, la ingeniería mecánica y civil. La mayoría de los movimientos implican algún tipo de contacto y fricción. Por ejemplo, el simple acto de caminar sería casi imposible sin el contacto y la fricción entre el calzado (o el pie) y el suelo. En ingeniería civil, el contacto se observa en situaciones como la interacción entre el suelo y las cimentaciones, en las uniones de barras mediante pernos o tornillos, y en estructuras mixtas que requieren modelar la interacción entre diferentes materiales. También tiene relevancia en biomecánica, especialmente en prótesis humanas e implantes dentales.

Dada la naturaleza no lineal del contacto mecánico, hoy en día se pueden emplear herramientas computacionales, como los software basados en el Método de los Elementos Finitos, para simular problemas estructurales que involucran contacto mecánico con una precisión suficiente para propósitos de diseño ingenieril. Esto es especialmente útil dado que resolver problemas de contacto puede ser bastante complejo.

El modelo de contacto por fricción que consideramos implica materiales elásticos y puede ser estudiado utilizando técnicas matemáticas como los multiplicadores de Lagrange. La deformación que experimenta un cuerpo elástico al chocar con otro es generada por este tipo de contacto por fricción, que puede observarse en diversas escalas, desde macroscópicas hasta nanoscópicas.

Por ejemplo, el fenómeno de contacto por fricción puede observarse en situaciones como el rebote de una pelotita de jebe contra una superficie rugosa, los neumáticos de un automóvil en una carretera asfaltada, o el rodillo de una máquina aplanadora sobre el pavimento. Además, se estudia en sistemas tribológicos y se utilizan dispositivos avanzados como microscopios de fuerza atómica en ingeniería.

Resolver PVF que modelan la interacción entre un cuerpo deformable y un obstáculo, utilizando multiplicadores de Lagrange, es un desafío técnico significativo, especialmente en problemas de contacto del tipo $p(x)-$Kirchhoff y asociados al $p(x)-$Laplaciano.

1.2. Antecedentes de la investigación

Tenemos, el siguiente modelo matemático

$$
(I') \qquad \left|\begin{array}{l}
-M\big(L(u)\big)\Delta_{p(x)}u + f_0(x) = 0, \quad \text{en } \Omega. \\[2ex]
u = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1. \\[2ex]
M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f_2(x), \quad \text{sobre } \Gamma_2. \\[2ex]
M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leq g(x). \\[2ex]
M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(x)\dfrac{u(x)}{|u(x)|}, \quad \text{si } u \neq 0 \text{ sobre } \Gamma_3.
\end{array}\right.
$$

el cual es un problema de valor de frontera no lineal para una ecuación diferencial parcial no lineal, que modela la deformación por cizallamiento antiplano de un cuerpo elástico no lineal en contacto por fricción con una base rígida. Este modelo ya fue estudiado en [1] mediante una técnica de multiplicadores de Lagrange. En el artículo [2] que se centra en el control óptimo de límites, el problema (I') se resolvió mediante una técnica de minimización; ahí, la solución débil fue el minimizador de la siguiente funcional, $I^0(\nu) : X \to \mathbb{R}$ definido como

$$
I^0(\nu) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla \nu(x)|^p dx + \int_{\Gamma_3} g(x)|\gamma\nu(x)|d\Gamma - \int_\Omega f_0(x)\nu(x)d\Gamma - \int_{\Gamma_2} f_2(x)\gamma\nu(x)d\Gamma
$$

En [3] se estudió el problema (I') mediante una técnica de multiplicadores de Lagrange; pero sólo demostraron la existencia de una solución débil. A diferencia de este, en [1] se consideró un marco funcional que permitió obtener la existencia de la solución débil, la singularidad y la estabilidad de dicha solución débil.

Nuestro trabajo tiene como base fundamental el artículo [1] de M. Chivu y A. Matei, seguiremos las ideas dadas allí y considerando el operador del tipo Kirchhoff propuesto, buscamos la generalización a los espacios de Sobolev o espacios generalizados.

1.3. Formulación del problema de investigación

En la mecánica de contacto(contacto por fricción de materiales linealmente elásticos y viscoelásticos) existen modelos asociados a ella, uno de estos modelos, está dado por el PVF:

$$(I)\qquad \left|\begin{array}{l} -M\big(L(u)\big)\Delta_{p(x)}u = f_1(x,u), \quad \text{en } \Omega. \\ \\ u = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1. \\ \\ M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f_2(x), \quad \text{sobre } \Gamma_2. \\ \\ M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leq g(x), \quad \text{sobre } \Gamma_3. \\ \\ M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(x)\dfrac{u(x)}{|u(x)|}, \quad \text{si } u \neq 0 \text{ sobre } \Gamma_3. \end{array}\right.$$

con $2 \leq p(x) \leq +\infty$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado con frontera Γ suficientemente regular, particionado en tres partes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ talque $med(\Gamma_i) > 0$, $i = 1,2,3$; ν es el vector normal exterior $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$ y M Lipschitz continua.

Formulamos la siguiente interrogante, ¿existe una única solución débil del problema (I) dada por la función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$?

No trabajamos en la parte numérica y ni la obtención de un software para resolver el problema (I). Así mismo, dado que el operador $p(x)-$ Laplaciano es no homogéneo, tendríamos algunas dificultades por lo que consideraremos utilizar la técnica variacional mixta y otros.

1.4. Delimitación del estudio

Teniendo en consideración que el problema (I) es del tipo $p(x)-$ Kirchhoff, el universo donde están ubicadas las soluciones débiles, es el espacio de Banach

$$X = \Big\{u \in W^{1,p(x)}(\Omega) : u|_{\Gamma}\Big\}$$

donde $2 \leq p(x) \leq +\infty$. En este trabajo de tesis, solo se estudiará la existencia y unicidad de la solución débil del sistema (I) en un subespacio X del espacio generalizado

$W^{1,p(x)}(\Omega)$, con un dominio acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, con frontera Γ suficientemente regular, particionado en tres partes Γ_1, Γ_2, y Γ_3, con $med(\Gamma_i) > 0$, para cada $i = 1, 2, 3$.

1.5. Justificación e importancia de la investigación

Los espacios de Sobolev generalizados, especialmente aquellos relacionados con problemas elípticos que involucran al operador $p(x)$-Laplaciano en dominios acotados de $\mathbb{R}^N$, su análisis es de gran relevancia, ya que proporciona la estructura necesaria para abordar problemas elípticos de manera efectiva.

El objetivo de este trabajo es destacar un modelo matemático interesante que surge en la mecánica de contactos; este modelo posee la ventaja de ser relativamente simple desde el punto de vista matemático, sin perder su relevancia física esencial. Las deformaciones por cizallamiento antiplano representan una de las clases más simples de deformaciones que pueden experimentar los cuerpos sólidos, en particular los cuerpos elásticos.

1.6. Formulación de los objetivos

1.6.1. Objetivo general

Demostrar que la solución débil del PVF

$$(I) \qquad \left| \begin{array}{l} -M\big(L(u)\big)\Delta_{p(x)}u = f_1(x,u), \quad \text{en } \Omega. \\[2ex] u = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1. \\[2ex] M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f_2(x), \quad \text{sobre } \Gamma_2. \\[2ex] M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leq g(x), \quad \text{sobre } \Gamma_3. \\[2ex] M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(x)\dfrac{u(x)}{|u(x)|}, \quad \text{si}\, u \neq 0 \text{ sobre } \Gamma_3. \end{array} \right.$$

existe y es única, para $2 \leq p(x) \leq +\infty$, donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$, con frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ suficientemente regular, tal que $med(\Gamma_i) > 0$, $i = 1, 2, 3$; ν

es el vector normal exterior $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$ y M es una función no decreciente, localmente Lipschitz continua.

1.6.2. Objetivos específicos

1) Probar la existencia de la solución débil. Mediante la formulación débil, mostraremos que, resolver el problema (I) es equivalente a hallar $(u, \lambda) \in X \times \Lambda$ tal que

$$\left| \begin{array}{l} \langle Au, v\rangle_{X' \times X} + b(v, \lambda) = \langle F(u), v\rangle_{X' \times X}, \quad \forall v \in X \\ \\ b(u, \mu - \lambda) \leq 0, \quad \forall \mu \in \Lambda. \end{array} \right.$$

donde:

$$\langle Au, v\rangle_{X' \times X} = M\big(L(u)\big) \int_\Omega \Big|\nabla u\Big|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx, \quad \forall u, v \in X.$$

$$\langle F(u), v\rangle_{X' \times X} = \int_\Omega f_1(x, u) v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(x) \gamma v d\Gamma, \quad \forall u, v \in X.$$

2) Demostrar que $(u, \lambda) \in X \times \Lambda$ es solución única del problema equivalente y así probar la unicidad de la solución del problema (I).

2 Marco Teórico

2.1. Marco Teórico

Desde que X.L. Fan, D. Zhao [10], y O. Kovacik, J. Rakosnik [18] presentaron los primeros estudios sobre los espacios generalizados de Sobolev, estos han adquirido una gran importancia. Por otra parte, los problemas de contacto que implican el operador $p-$Laplaciano abarcan una amplia variedad de situaciones físicas en ingeniería y ciencias. Los trabajos desarrollados en [1], [7], [3], entre otros, nos motivaron a abordar el problema que estamos planteando; los problemas elípticos del tipo $p(x)-$Kirchhoff han generado un interés particular, especialmente aquellos presentados en [11], [12], y [15]. El problema planteado en [1] fue abordado específicamente con técnicas variacionales mixtas.

El fundamento físico de este estudio proviene de la mecánica de contactos, la cual es útil para diseñar sistemas técnicos de seguridad y ahorro de energía. En este trabajo, emplearemos el método variacional mixto, multiplicadores de Lagrange, Teorema de Sobolev-Slobodeckij, Teoremas de Inmersión y Compacidad, y el método de Galerkin. Nos situamos en el marco del estudio cualitativo de las Ecuaciones Integro-diferenciales parciales elípticas de tipo $p(x)-$Kirchhoff.

Abordaremos los espacios generalizados de Lebesgue y Sobolev relacionados con problemas elípticos que involucran al operador $p(x)-$Laplaciano sobre dominios acotados en $\mathbb{R}^N$. Estudiar estos espacios es importante porque proporcionan la estructura necesaria para resolver problemas elípticos con ciertas condiciones de crecimiento. Las demostraciones pueden encontrarse en los trabajos de Fan [10], Guimarães [23], y otros autores.

2.2. Marco Conceptual

Introducción

En este trabajo, demostraremos la existencia y unicidad de la solución débil del siguiente problema:

$$
(I)\qquad \left|\begin{array}{l}
-M\big(L(u)\big)\Delta_{p(x)}u = f_1(x,u), \quad \text{en } \Omega. \\[2ex]
u = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1. \\[2ex]
M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f_2(x), \quad \text{sobre } \Gamma_2. \\[2ex]
M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leq g(x), \quad \text{sobre } \Gamma_3. \\[2ex]
M\big(L(u)\big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(x)\dfrac{u(x)}{|u(x)|}, \quad \text{si}\, u \neq 0 \text{ sobre } \Gamma_3.
\end{array}\right.
$$

donde $2 \leq p(x) \leq +\infty$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado con frontera Γ suficientemente suave, particionado en tres partes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ talque $med(\Gamma_i) > 0$, $i = 1,2,3$; ν es el vector normal exterior $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$ y M es una función no decreciente, localmente Lipschitz continua.

Vamos a examinar una categoría de problemas relacionados con el contacto por fricción utilizando la técnica especial de multiplicadores de Lagrange. El modelo matemático se basa en un problema de valor en la frontera que es gobernado por el operador $p(x)-$Laplaciano. En principio, vamos a presentar una formulación variacional mixta; posteriormente, discutiremos la existencia de una solución única para el problema variacional mixto en un marco funcional abstracto, con una revisión rápida sobre la estabilidad de la solución. Después, aplicaremos los resultados abstractos para analizar la solubilidad débil y única del problema de valor límite que estamos considerando, y finalmente discutiremos la estabilidad de la solución débil.

Estudiaremos los espacios generalizados de Lebesgue y Sobolev, relacionados con problemas elípticos que involucran al operador $p(x)-$Laplaciano en un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ definido por

$$\Delta_{p(x)}u = div\Big(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\Big)$$

El operador $p(x)-$Laplaciano aparece en algunos problemas físicos, como por ejemplo, en la teoría de la elasticidad y la mecánica de fluidos, específicamente en los fluidos de tipo electrorreológico. Además, el operador $p(x)-$Laplaciano tiene una propiedad interesante: no es homogéneo cuando la función p no es constante. Como resultado de esto, enfrentamos algunas dificultades, como por ejemplo, no podemos utilizar el Teorema de los multiplicadores de Lagrange en la mayoría de los problemas que involucran este operador.

Los dos primeros capítulos de este trabajo estarán dedicados al estudio de los espacios generalizados de Lebesgue y Sobolev, además de considerar las propiedades básicas del operador de Nemytskii. También presentaremos resultados de inmersión, incluyendo un teorema de tipo Sobolev y la desigualdad de Poincaré. En los capítulos siguientes, nos enfocaremos en el estudio del problema principal, formulado como el problema I.

El Espacio $L^{p(x)}(\Omega)$

Los espacios $L^{p(x)}(\Omega)$, constituyen la extensión de los espacios clásicos de Lebesgue al sustituir el exponente constante p por una función continua $p = p(x)$.

Estos espacios resultantes comparten muchas propiedades con los espacios $L^p(\Omega)$, donde p es un número real positivo, pero difieren en varios aspectos. Aunque fueron presentados en 1931 por W. Orlicz. En 1950 se volvió a estudiar estoespacios, gracias a H. Nakano.

Diez años después, los espacios de Lebesgue con exponente variable fueron introducidos en la literatura rusa por I.V. Tsenov, y en 1979 I.I. Sharapudinov estudió aspectos topológicos de estos espacios en intervalos de la recta real. En 1991, O. Kovacik y J. Rakosnik publicaron el trabajo [18], considerado como el inicio del estudio de los espacios generalizados de Lebesgue.

Los trabajos de V.V. Zhikov sobre problemas variacionales con exponente variable, en la década de los noventa se desarrolló una intensa actividad en este tema, así como en ecuaciones diferenciales con exponente variable. Las investigaciones recientes en estos temas han sido impulsadas por aplicaciones en varios problemas relacionados con objetos con crecimiento local no estándar, en los cuales aparecen condiciones de crecimiento de orden variable.

Las propiedades interesantes de los flujos ER pueden ser explotadas en aplicaciones tecnológicas, como en la industria automotriz para sistemas de embrague, frenos y amortiguadores, o en articulaciones de brazos y manos robóticos. Además, la técnica ER puede utilizarse para fabricar materiales funcionales avanzados, como cristales fotónicos, tintas inteligentes y polímeros compuestos heterogéneos. Dado que estos fluidos tienen propiedades no homogéneas, los espacios clásicos de Lebesgue y Sobolev no son adecuados para describirlos, ya que el exponente p en estas aplicaciones necesita variar de un punto a otro.

2.3. El espacio $L^{p(x)}(\Omega)$

Estudiamos el espacio de Lebesgue con exponente variable $p(x)$ el cual se define de la siguiente manera

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in \mathfrak{M}(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un conjunto medible y $p \in L^\infty(\Omega)$, con $p \geq 1$, $\mathfrak{M}(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones reales medibles definidas sobre Ω.

Este espacio juega un papel clave en el estudio de problemas elípticos variacionales con determinadas condiciones de crecimiento.

2.3.1. Definiciones y resultados básicos

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto medible. Consideramos el conjunto

$$C_+(\overline{\Omega}) = \left\{ p \in C(\overline{\Omega}) : p(x) > 1, \forall x \in \overline{\Omega} \right\}$$

Para $p \in C_+(\overline{\Omega})$ y $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ respectivamente, definimos la función modular

$$\rho : L^{p(x)}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx$$

Además,

$$p^- = \min_{x \in \overline{\Omega}} p(x), \qquad p^+ = \max_{x \in \overline{\Omega}} p(x), \qquad \text{para cada} \quad p \in C_+(\overline{\Omega})$$

Por su importancia, a continuación mencionaremos y en algunos casos daremos los bosquejos de las demostraciones de los resultados más importantes que involucran dicha función, y que serán útiles a nuestro trabajo.

Proposición 1. *Dadas las funciones $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$, tenemos las siguientes propiedades:*

(a) $\rho(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$;

(b) ρ *es simétrica. i,e)* $\rho(-u) = \rho(u)$;

(c) ρ *es una función convexa.*

i,e)$\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$, *para todo* $t \in [0,1]$.

(d) $\rho(u+v) \leq 2^{p^+}\Big(\rho(u) + \rho(v)\Big)$;

(e) *Se cumplen los siguientes casos:*

(i) *Si* $\lambda > 1$, *entonces*

$$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+}\rho(u),$$

(ii) *Si* $0 < \lambda < 1$, *tenemos*

$$\lambda^{p^+}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \rho(u).$$

(f) *Para cada* $u \in L^{p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$, $\rho(\lambda u)$ *es una función creciente, contínua y convexa para* $\lambda > 0$.

Demostración.
Ver [23]pág.12.

Proposición 2. *El espacio generalizado* $L^{p(x)}(\Omega)$ *es un espacio vectorial.*

Demostración.
Ver [23]pág. 11.

Proposición 3. *Sea* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$,*entonces*

$$\|u\|_{p(x)} = inf\Big\{\lambda > 0 : \rho\Big(\frac{u}{\lambda}\Big) \leq 1\Big\}$$

es una norma en $L^{p(x)}(\Omega)$.

Demostración.

Sean $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Debemos mostrar que

(i) $\|u\|_{p(x)} \geq 0$

(ii) $\|u\|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow u = 0,$

(iii) $\|\alpha u\|_{p(x)} = |\alpha| \|u\|_{p(x)},$

(iv) $\|u + v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)}.$

En efecto,

(i) Es inmediato.

(ii) Si $u = 0$, entonces $\|u\|_{p(x)} = 0$.

Si $\|u\|_{p(x)} = 0$ con $u \neq 0$, entonces, existe $(\lambda_n) \subset \langle 0, 1\rangle$ tal que

$$\lambda_n \to 0 \text{ y } \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

luego,

$$1 \geq \rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) = \int_\Omega \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^{p(x)} |u(x)|^{p(x)} dx > \left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx$$

Siendo $\rho(u) > 0$, tendríamos

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \longrightarrow +\infty, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

una contradicción. Por lo tanto, $u = 0$.

(iii) Si $\alpha = 0$, el resultado es inmediato.

Si $\alpha \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\|_{p(x)} &= \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{\alpha u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\
&= \text{ínf}\left\{|\alpha|\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha| \,\text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha| \, \|u\|_{p(x)}.
\end{aligned}$$

(iv) Definamos el conjunto

$$C = \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega) : \rho(u) \leq 1\right\}$$

Observamos que $I_u = \{\lambda > 0 : \lambda^{-1}u \in C\}$. Siendo $L^{p(x)}(\Omega)$ un espacio vectorial y ρ una función convexa, tenemos que C es convexo. Denotando $\|u\|_{p(x)} = a$ y $\|v\|_{p(x)} = b$, tenemos

$$\frac{u}{a+\epsilon}, \frac{v}{b+\epsilon} \in C, \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

pues $a+\epsilon \in I_u$ y $b+\epsilon \in I_v$.

Siendo C convexo, tenemos

$$\frac{tu}{a+\epsilon} + \frac{(1-t)v}{b+\epsilon} \in C, \text{ para } t \in [0,1].$$

En particular, para

$$t = \frac{a+\epsilon}{a+b+2\epsilon},$$

tenemos que

$$\frac{tu}{a+\epsilon} + \frac{(1-t)v}{b+\epsilon} = \frac{u+v}{a+b+2\epsilon}$$

luego,

$$\frac{u+v}{a+b+2\epsilon} \in C,$$

así concluimos que

$$a+b+2\epsilon \in I_{u+v}$$

entonces,

$$\|u+v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)} + 2\epsilon, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Por lo tanto,

$$\|u+v\|_{p(x)} \leq \|u\|_{p(x)} + \|v\|_{p(x)},$$

esto, concluye la demostración. ■

Proposición 4. *"Si la función $p(x) = p$ es constante, entonces*

$$\|\,.\,\|_{p(x)} = \|\,.\,\|_p,$$

donde $\|\,.\,\|_p$ es la norma usual del espacio $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$."

Demostración.

Ver [23]pág.15.

Proposición 5. *Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$, entonces*

$$\|u\|_{p(x)} = a \text{ si, y solo si, } \rho\Big(\frac{u}{a}\Big) = 1$$

Demostración.

Ver [23]pág.15.

Proposición 6. *Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, entonces tenemos :*

(1) *Si $\|u\|_{p(x)} < 1\ (= 1; > 1) \iff \rho(u) < 1\ (= 1; > 1)$;*

(2) *Si $\|u\|_{p(x)} > 1, \Longrightarrow \|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}$;*

(3) *Si $\|u\|_{p(x)} < 1, \Longrightarrow \|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}$.*

Demostración.

(1) Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Si $u = 0$ es inmediato.

Supongamos $u \neq 0$.

De la proposición 5, se tiene que:

Si $\|u\|_{p(x)} = 1 \Leftrightarrow \rho(u) = 1$.

Si $\|u\|_{p(x)} = a < 1$, entonces $1 < \frac{1}{a}$. Siendo $\rho(\lambda u)$ creciente para $\lambda \in [0, \infty)$, tenemos

$$\rho(u) < \rho\left(\frac{u}{a}\right) < 1.$$

Si $\rho(u) < 1$, entonces $1 \in I_u$.

Luego, por la proposición 5, concluimos que $\|u\|_{p(x)} < 1$.

La prueba de la otra equivalencia es similar.

(2) Sea $\|u\|_{p(x)} = a > 1$. Entonces,

$$\rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Siendo $\frac{1}{a} < 1$, por el item (e) de la proposición 1 tenemos

$$\frac{1}{a^{p+}}\rho(u) \leq \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1 < \frac{1}{a^{p-}}\rho(u)$$

luego,

$$\|u\|_{p(x)}^{p-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p+}$$

(3) Seguir la misma idea dada en (2).■

Proposición 7. *Sea* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^{p(x)}(\Omega)$. *Si* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, *entonces las afirmaciones*

(1) $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \|u_\nu\|_{p(x)} = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{\nu\to+\infty} \rho(u_\nu) = 0$; *o equivalentemente*

$$\lim_{\nu\to+\infty} \|u_\nu - u\|_{p(x)} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\nu\to+\infty} \rho(u_\nu - u) = 0.$$

(2) $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \|u_\nu\|_{p(x)} = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{\nu\to+\infty} \rho(u_\nu) = +\infty$,

son equivalentes

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ **(2)** Si $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$, entonces dado $0 < \epsilon < 1$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_o$ implica

$$\|u_n - u\|_{p(x)} < \epsilon < 1$$

luego,

$$\rho\left(u_n - u\right) \leq \|u_n - u\|_{p(x)}^{p-} < \epsilon^{p-} < \epsilon$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(u_n - u\right) = 0$$

(2) $\Rightarrow$ **(1)** Si $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\left(u_n - u\right) = 0$, entonces dado $0 < \epsilon < 1$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_o$ implica

$$\rho\left(u_n - u\right) < \epsilon^{p+} < \epsilon < 1$$

luego, por la proposición 6, tenemos

$$\|u_n - u\|_{p(x)} < 1$$

siempre que $n \geq n_o$. Nuevamente por la proposición 6, tenemos

$$\|u_n - u\|_{p(x)}^{p+} \leq \rho\left(u_n - u\right) < \epsilon^{p+}, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0. \blacksquare$$

2.3.2. Propiedades del espacio $L^{p(x)}(\Omega)$

Mencionaremos y realizaremos el bosquejo de la demostración de sus principales propiedades.

Teorema 1. *"El espacio generalizado $L^{p(x)}(\Omega)$ es un espacio de Banach"*

Demostración.
Dada $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ una sucesión de Cauchy. Si demostramos que (u_n) posee una subsucesión convergente, habremos demostrado el teorema.
Afirmación: Existe una subsucesión (u_k) de (u_n) tal que

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{p(x)} < \frac{1}{2^k}, \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

En efecto, dado $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_1$ entonces

$$\|u_m - u_n\|_{p(x)} < \frac{1}{2}.$$

Para $\epsilon = \frac{1}{2^2}$ existe $n_2 \geq n_1$ tal que $m, n \geq n_2$ entonces

$$\|u_m - u_n\|_{p(x)} < \frac{1}{2^2}$$

en particular,

$$\|u_{n_2} - u_{n_1}\|_{p(x)} < \frac{1}{2^2}.$$

dado $\epsilon = \frac{1}{2^3}$ existe $n_3 \geq n_2$ tal que $m, n \geq n_3$ implica

$$\|u_m - u_n\|_{p(x)} < \frac{1}{2^2}$$

en particular,

$$\|u_{n_3} - u_{n_2}\|_{p(x)} < \frac{1}{2^3}.$$

y así sucesivamente. Denotando $(u_{n_k}) = (u_k)$, luego buscamos demostrar que (u_k) es convergente, para esto definimos la sucesión no decreciente

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|, x \in \Omega$$

entonces, (v_n) es una sucesión de $\subset L^{p(x)}(\Omega)$ y, por (2.1) tenemos

$$\|v_n\|_{p(x)} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

luego, por la proposición 6

$$\int_\Omega |v_n(x)|^{p(x)}\,dx \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Usando (2.2) y el Teorema de la Convergencia Monótona, $\exists v \in L^{p(x)}(\Omega)$:

$$\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x),\ \text{ c.t.p. en } \Omega. \tag{2.3}$$

Para $x \in \Omega$ y $m, n \geq 2$, tenemos

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u_n(x)| &\leq |u_m(x) - u_{m-1}(x)| + |u_{m-1}(x) - u_{m-2}(x)| + \cdots \\ &+ |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq v(x) - v_{n-1}(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por (2.3) y (2.4) seguimos que, para $x \in \Omega$, la sucesión $\{u_k(x)\} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy, que a su vez es convergente, es decir

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x),\ \text{ c.t.p. en } \Omega \tag{2.5}$$

luego, de (2.4) y (2.5) resulta que para $k \geq 2$

$$|u_k(x) - u(x)| \leq v(x),\ \text{ y c.t.p. en } \Omega. \tag{2.6}$$

Como $v \in L^{p(x)}(\Omega)$, entonces por (2.6) se tiene

$$u \in L^{p(x)}(\Omega)$$

luego, por (2.5) y (2.6),

$$|u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} \leq v(x)^{p(x)},\ \text{ c.t.p. en } \Omega$$

entonces por el Teorema de la Convergencia Dominada

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k(x) - u(x)|^{p(x)} = 0,$$

es decir,

$$\lim_{k\to\infty} \rho\,(u_k - u) = 0$$

Por lo tanto, por la proposición 7,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_k - u\|_{p(x)} = 0$$

con lo cual terminamos la demostración.■

Corolario 1. *Si $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $u_\nu \to u$, entonces, existe una subsucesión (u_{ν_k}) tal que:*

(a) $\lim\limits_{\nu\to+\infty} u_{\nu_k}(x) = u(x)$, *c.t.p. en* Ω.

(b) $|u_{\nu_k}(x)| \leq h(x)$, *para* $k \geq 1$, *c.t.p. en* Ω, *con* $h \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Demostración.

(a) Como la sucesión (u_ν) es de Cauchy, existe una subsucesión (u_{ν_k}) verificando (2.1).

Procediendo como en la demonstración del Teorema 1 y de (2.5) concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} u_{\nu_k}(x) = g(x), \text{ c.t.p. en } \Omega$$

Además de eso, por (2.6):

$$|u_{\nu_k}(x) - g(x)| \leq v(x), \text{ para todo } k \geq 1, \text{ c.t.p. en } \Omega \tag{2.7}$$

como $v \in L^{p(x)}(\Omega)$, por el Teorema de la Convergencia Dominada $g \in L^{p(x)}(\Omega)$ y

$$u_{\nu_k} \longrightarrow g \text{ en } L^{p(x)}(\Omega).$$

Luego, $u(x) = g(x)$, c.t.p. en Ω, y por (2.7), obtenemos (a).

(b) Tomando $h = g + v$ y aplicando nuevamente (2.7) llegamos a lo deseado.■

Proposición 8. *Sea $p^- > 1$ y dado $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ para todo}\, x \in \Omega.$$

Si $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, entonces se cumple una ***desigualdad del tipo Hölder.***

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-})\|u\|_{p(x)}\|v\|_{q(x)}.$$

Demostración.

Ver [7]pág. 20.

Teorema 2. *Para $p^- > 1$ tenemos que $L^{p(x)}(\Omega)$ es un espacio Reflexivo.*

Demostración.

Ver [12]pág.19.

Definamos los siguientes conjuntos

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < 2\} \text{ y } \Omega_+ = \{x \in \Omega : p(x) \geq 2\}$$

Observamos que $L^{p(x)}(\Omega) = L^{p(x)}(\Omega_+) \oplus L^{p(x)}(\Omega_-)$. Demostrando que:

(i) $L^{p(x)}(\Omega_+)$ es reflexivo

(ii) $L^{p(x)}(\Omega_-)$ es reflexivo

luego, concluiremos que $L^{p(x)}(\Omega)$ es reflexivo, pues la suma directa de dos espacios de Banach reflexivos es un espacio reflexivo. En efecto:

(i) Afirmación: $L^{p(x)}(\Omega_+)$ es uniformemente convexo. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y sean $u, v \in L^{p(x)}(\Omega_+)$ tales que

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq 1,\ \|v\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq 1 \quad \text{y} \quad \|u-v\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} > \epsilon \tag{2.8}$$

Desde que $p(x) \geq 2$ en Ω_+, entonces por la primera desigualdad de Clarkson, tenemos

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} \leq \frac{1}{2}\left(|u|^{p(x)} + |v|^{p(x)}\right),\ \text{para } x \in \Omega_+ \tag{2.9}$$

aplicando integrales sobre Ω_+ en ambos miembros de (2.9) y usando (2.8), obtenemos

$$\int_{\Omega_+}\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} dx \quad + \quad \int_{\Omega_+}\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega_+}\frac{1}{2}|u|^{p(x)}dx + \int_{\Omega_+}\frac{1}{2}|v|^{p(x)}dx \leq 1.$$

de esta desigualdad se sigue que

$$\int_{\Omega_+}\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p(x)} dx \quad + \quad \int_{\Omega_+}\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p(x)} dx \leq 1 \tag{2.10}$$

Por la proposición 6 y las desigualdades (2.9) - (2.10) tenemos

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^{p+}_{Lp^{(x)}(\Omega_+)} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^{p+}_{L^{p(x)}(\Omega_+)} \leq 1. \tag{2.11}$$

Por otro lado, si $\|u-v\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} > \epsilon$, por (2.11) tenemos que

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^{p(x)}(\Omega_+)} < 1-\delta,$$

donde

$$\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p+}\right]^{\frac{1}{P+}} > 0$$

luego, $L^{p(x)}(\Omega_+)$ es uniformemente convexo y, por el Teorema de Milman-Pettis es reflexivo.

(ii) Sea $q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ tal que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \forall x \in \Omega.$$

Definamos el operador lineal

$$\begin{aligned} T : L^{p(x)}(\Omega_-) &\longrightarrow \left(L^{q(x)}(\Omega_-)\right)^* \\ u \quad &\longmapsto \langle T(u), v\rangle = \int_{\Omega_-} u(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder (ver Proposición 8), tenemos

$$|\langle T(u), v\rangle| \leq C\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)}\|v\|_{L^{q(x)}(\Omega_-)}$$

donde $C = \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right)$, luego,

$$\|T(u)\|_{L^{q(x)}(\Omega_-)^*} \leq C\|u\|_{L^{p(z)}(\Omega_-)} \tag{2.12}$$

por lo tanto, T es continuo.

Sea $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} = a$ y considere la función

$$v_o(x) = \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)-1} \operatorname{sgn}(x), \quad x \in \Omega_-$$

donde sgn es la función signo, o sea,

$$\text{sgn(t)} \; = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \\ -1, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Observamos que

$$v_o \in L^{q(x)}(\Omega_-) \quad \text{ y } \quad \|v_o\|_{L^{q(x)}(\Omega_-)} = 1,$$

además,

$$\langle T(u), v_o\rangle = \int_{\Omega_-} u(x)v_o(x)dx = \int_{\Omega_-} \left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)-1} |u(x)|dx = \int_{\Omega_-} a\left|\frac{u(x)}{a}\right|^{p(x)} dx = a$$

luego,

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \leq \|T(u)\|_{(L^{q(x)}(\Omega_-))^*} \tag{2.13}$$

de (2.12) y (2.13), obtenemos

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \leq \|T(u)\|_{\left(L^{q(x)}(\Omega_-)\right)^*} \leq C\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega_-)} \,\forall\, u \in L^{p(x)}(\Omega_-) \tag{2.14}$$

por lo tanto, de (2.14), concluimos que T es inyectivo.

Como el operador T es lineal, entonces $E = T\left(L^{p(x)}(\Omega_-)\right)$ es un subespacio vectorial de $\left(L^{q(x)}(\Omega_-)\right)^*$ pues $L^{p(x)}(\Omega_-)$ es un espacio de Banach y por (2.14) concluimos que E es cerrado.

Como $L^{q(x)}(\Omega_-)$ es reflexivo, entonces $\left(L^{q(x)}(\Omega_-)\right)^*$ es reflexivo, tenemos que E es reflexivo. Por lo tanto, concluimos que $L^{q(x)}(\Omega_-)$ es reflexivo.■

El siguiente resultado, corresponde al **Teorema de la Representación de Riesz** para $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 3. *Sea $p^- > 1$ y sea $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \quad \forall x \in \Omega.$$

Si $f \in (L^{p(x)}(\Omega))^*$, entonces existe un único $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, tal que

$$f(v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \quad \forall u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Demostración.
Ver [7]pág. 23.

Teorema 4. ***(Densidad en** $L^{p(x)}(\Omega)$).* *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, el espacio $C_0(\Omega)$ es denso en $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Demostración.
Ver [23]pág.24.

Teorema 5. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Demostración.
Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Dado $\eta > 0$ existe $v \in C_0(\Omega)$ tal que

$$\|u - v\|_{p(x)} < \frac{\eta}{2}. \tag{2.15}$$

Para todo $\epsilon > 0$ tenemos

$$\varphi_\varepsilon := J_\varepsilon * v \in C_0^\infty(\Omega), J_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega), \text{si } \epsilon < dist(supp(v), \partial\Omega)$$

y

$$\varphi_\varepsilon \to v \text{ uniformemente en } supp(v), \text{ cuando } \epsilon \to 0^+ \tag{2.16}$$

donde $J_\varepsilon \in C_o^\infty(\Omega)$ y además

$$\varphi_\varepsilon(x) = (J_\varepsilon * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} J_\varepsilon(x-y)v(y)dy,$$

por (2.16) y por el Teorema de la Convergencia Dominada, tenemos

$$\rho(\varphi_\epsilon - v) = \int_\Omega |\varphi_\varepsilon - v|^{p(x)} dx = \int_{\text{supp(v)}} |\varphi_\epsilon - v| p(x)dx \longrightarrow 0, \text{ cuando } \epsilon \to 0^+.$$

Luego, por la proposición 7, tenemos

$$\|\varphi_\varepsilon - v\|_{p(x)} < \frac{\eta}{2}, \text{ cuando } \epsilon \to 0^+ \tag{2.17}$$

por lo tanto, de (2.15) y (2.17) tenemos

$$\|u - \varphi_\varepsilon\|_{p(x)} \leq \|u - v\|_{p(x)} + \|\varphi_\varepsilon - v\|_{p(x)} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

cuando $\epsilon \to 0^+$, concluyendo la demonstración.■

Teorema 6. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto, entonces el espacio $L^{p(x)}(\Omega)$ es separable.*

Demostración.

Definimos $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}, |x| < n \right\} \text{para cada} n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que $\bar{\Omega}_n \subseteq \Omega$ es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea P el conjunto de todos los polinomios de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}$ con coeficientes racionales. Definimos el conjunto

$$P_n = \{\chi_{\Omega_n} f : f \in P\}, n \in \mathbb{N}$$

donde χ_{Ω_n} es la función característica de $\bar{\Omega}_n$. Por el Teorema de Stone-Weierstrass,

$$\overline{P_n} = C(\bar{\Omega}_n)$$

además, el conjunto $P_o = \bigcup^{\infty} P_n$ es un conjunto enumerable.

Sea $\epsilon > 0$ pequeño y sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, entonces, por el Teorema 4 existe $v \in C_0(\Omega)$ tal que

$$\|u - v\|_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si, $\frac{1}{n} < dist(supp(v), \partial\Omega)$, entonces $supp(v) \subset \bar{\Omega}_n$, así $f \in P_n$ tal que

$$\|v - f\|_{L^{\infty}(\bar{\Omega}_n)} \leq \frac{\epsilon}{2} \left|\bar{\Omega}_n\right|^{-1/c} \tag{2.18}$$

donde

- $c = p^+$, si $\left|\bar{\Omega}_n\right| < 1$;
- $c = p^-$, si $\left|\bar{\Omega}_n\right| \geq 1$.

En cualquier situación usando (2.18) tenemos

$$\int_{\Omega} |v - f|^{p(x)} dx = \int_{\bar{\Omega}_n} |v - f|^{p(x)} dx < \frac{\epsilon}{2}$$

así, tenemos que

$$\|v - f\|_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego,

$$\|u - f\|_{p(x)} \leq \|u - v\|_{p(x)} + \|v - f\|_{p(x)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

es decir P_0 es denso en $L^{p(x)}(\Omega)$. Por lo tanto, $L^{p(x)}(\Omega)$ es separable.■

2.3.3. El operador de Nemytskii

Estudiaremos al operador de Nemytskii entre espacios $L^{p(x)}(\Omega)$.
Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de Carathéodory y N_f el operador de Nemytskii definido por f, tal que para toda función medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$, se satisface

$$(N_f u)(x) = f(x, u(x)).$$

Teorema 7. *Si $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$, entonces N_f es continuo y acotado, además existe una constante $b \geq 0$ y una función no negativa $a \in L^{q(x)}(\Omega)$ tales que*

$$|f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p(x)}{q(x)}}, \forall x \in \Omega, s \in \mathbb{R}.$$

Recíprocamente, si f satisface $|f(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p(x)}{q(x)}}$, entonces

$$N_f : L^{p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega),$$

es continuo y acotado.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $N_f : L^{p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega)$. Supongamos que $f(x,0) = 0$, debemos demostrar la continuidad de N_f en $u = 0$.

Sea $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega) : u_n \to 0$, por la proposición 7, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)}\, dx = 0 \tag{2.19}$$

Definimos la función $h : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(x,s) = \left| f\left(x, \operatorname{sgn}(s)|s|^{1/p(x)}\right) \right|^{q(x)}$$

para $v \in L^1(\Omega)$, tenemos que

$$(N_h v)(x) = h(x, v(x)) = \left| f\left(x, sgn(v(x))|v(x)|^{1/p(x)}\right) \right|^{q(x)} \tag{2.20}$$

como

$$sgn(v(x))|v(x)|^{1/p(x)} \in L^{p(x)}(\Omega)$$

por la hipótesis tenemos que $N_h v \in L^1(\Omega)$, luego,

$$N_h : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$$

Por lo tanto, N_h es continuo en $v = 0$.

Sea la sucesión $(v_n) \subset L^1(\Omega)$, donde $v_n = sgn(u_n)\,|u_n|^{|p(x)}$, luego por (2.20)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |v_n(x)|\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n(x)|^{p(x)} = 0.$$

Debido que N_h es continuo, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(N_h v_n)(x)|\, dx = 0$$

y por (2.20),

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(N_f u_n)(x)|^{q(x)}\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f\left(x, \operatorname{sgn}(u_n(x))\,|u_n(x)|\right)|^{q(x)}\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |(N_h v_n)(x)|\, dx = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la proposición 7, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|N_f u_n\|_{q(x)} = 0$$

así hemos demostrado la continuidad de N_f en $u = 0$.

En el caso general: Si $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, entonces es suficiente considerar la función

$$g(x,s) = f(x, s + u(x)) - f(x, u(x))$$

y verificar que $g(x,0) = 0$.

Ahora probaremos que N_f es acotado. En efecto, sea $B \subset L^{p(x)}(\Omega)$ un conjunto acotado, entonces, $\exists r > 0$ tal que

$$\|u\|_{p(x)} \le r, \forall u \in B$$

luego, por la proposición 6, $\exists c > 0$:

$$\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \le c$$

desde que

$$N_h : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$$

por lo tanto, N_h es acotado.

Observe que si $u \in B$, entonces $v = sgn(u)|u|^{|p(x)} \in L^1(\Omega)$, pues

$$\int_\Omega |v(x)|dx = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx \le c$$

siendo N_h acotado, $\exists k > 0$:

$$\int_\Omega |(N_f u)(x)|^{q(x)} dx = \int_\Omega \left| N_h \left(sgn(u_n(x)) \, |u_n(x)|^{p(x)} \right) \right| dx \le k$$

luego, por la proposición 6, $N_f(B) \subset L^{q(x)}(\Omega)$ es acotado.
Como $N_h : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$, entonces $\exists b_1 \ge 0$ y una función no negativa $a_1 \in L^1(\Omega)$ de modo que se cumple

$$|(N_h v)(x)| \le a_1(x) + b_1|v(x)|, \text{ para } v \in L^1(\Omega).$$

Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, entonces, $v = \operatorname{sgn}(u)|u|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$ además,

$$|(N_f u)(x)|^{q(x)} = |(N_h v)(x)|^{q(x)} \leq a_1(x) + b_1|u(x)|^{p(x)}.$$

siendo $1/q(x) \leq 1$, tenemos

$$\begin{aligned} |(N_f u)(x)| &\leq \left(a_1(x) + b_1|u(x)|^{p(x)}\right)^{1/q(x)} \\ &\leq (a_1(x))^{1/q(x)} + b_1^{1/q(x)}|u(x)|^{p(x)/q(x)} \\ &\leq a(x) + b|u(x)|^{p(x)/q(x)} \end{aligned}$$

donde $a = a_1^{1/q(x)} \in L^{q(x)}(\Omega)$ y $b = b_1^{1/q^-} \geq 0$, por lo tanto, hemos demostrado la desigualdad planteada.
($\Leftarrow$) Suponga que existe una constante $b \geq 0$ y $a \in L^{q(x)}(\Omega)$ una función no negativa, tal que verifica la desigualdad $|f(x,s)| \leq a(x) + b\,|s|^{p(x)/q(x)}$.
Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ observemos que

$$\begin{aligned} |(N_f u)(x)|^{q(x)} &\leq \left|a(x) + b\,|u(x)|^{p(x)/q(x)}\right|^{q(x)} \\ &\leq 2^{q(x)}\left(|a(x)|^{q(x)} + b^{q(x)}|u(x)|^{p(x)}\right) \\ &\leq 2^{q^+}|a(x)|^{q(x)} + 2^{q^+}b^{q(x)}|u(x)|^{p(x)}. \end{aligned}$$

Como, $a \in L^{q(x)}(\Omega)$, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ y la función $b^{q(x)}$ es acotada, de la última desigualdad tenemos que

$$N_f u \in L^{q(x)}(\Omega)$$

mostrando que

$$N_f : L^{p(x)}(\Omega) \to L^{q(x)}(\Omega).$$

Procediendo similarmente a la primera parte de la demostración, mostramos que N_f es continuo y acotado.■

Corolario 2. *Supongamos que $|\Omega| < +\infty$, $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$.*

$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

si, y solamente si, $q(x) \leq p(x)$ c.t.p en Ω. Además

$$L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

es una inmersión continua.

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$. Consideremos la función de Carathéodory

$$\begin{aligned} f : \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,s) &\longmapsto f(x,s) = s. \end{aligned}$$

Entonces, por el teorema 7, existe una constante $b > 0$ y una función no negativa $a \in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que

$$|s| \leq a(x) + b|s|^{p(x)/q(x)}$$

De esta desigualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} |s|^{q(x)} &\leq 2^{q(x)} \left(|a(x)|^{q(x)} + b^{q(x)}|s|^{p(x)} \right) \\ &\leq 2^{q^+}|a(x)|^{q(x)} + (2b)^{q^+}|s|^{p(x)} \end{aligned} \tag{2.21}$$

luego, tenemos $q(x) \leq p(x)$, c.t.p. en Ω, pues de lo contrario la desigualdad (2.21) no sería válida cuando $s \longrightarrow \infty$.

($\Leftarrow$) Sin pérdida de generalidad, supongamos $q(x) \leq p(x)$ en Ω. Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ y consideremos

$$E = \{x \in \Omega : |u(x)| < 1\}$$

así

$$\begin{aligned} \rho_q := \int_\Omega |u(x)|^{q(x)}dx &= \int_E |u(x)|^{q(x)}dx + \int_{E^c} |u(x)|^{q(x)}dx \\ &\leq |E| + \int_{E^-} |u(x)|^{q(x)}dx \\ &\leq |\Omega| + \int_{E^+} |u(x)|^{p(x)}dx \\ &\leq |\Omega| + \rho_p(u) < \infty \end{aligned}$$

entonces $u \in L^{q(x)}(\Omega)$. Por lo tanto,

$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega).$$

Mostraremmos, que la inmersión $L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ es continua.

Afirmación:

$$\text{Si } \|u\|_{p(x)} \leq 1, \quad \text{entonces} \quad \|u\|_{q(x)} \leq |\Omega| + 1 \tag{2.22}$$

En efecto, sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $\|u\|_{p(x)} \leq 1$, de (2.22) y de la proposición 6 se tiene la siguiente desigualdad

$$\rho_q(u) \leq |\Omega| + \rho_p(u) \leq |\Omega| + 1$$

así,
$$\rho_q\left(\frac{u}{|\Omega|+1}\right) := \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{|\Omega|+1}\right|^{q(x)} dx \leq \frac{1}{|\Omega|+1}\int_\Omega |u(x)|^{q(x)}dx \leq 1$$
nuevamente por la proposición 6,
$$\left\|\frac{u}{|\Omega|+1}\right\|_{q(x)} \leq 1$$
de donde se sigue la afirmación.

Ahora, para $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ con $\|u\|_{p(x)} = a \neq 0$ y usando la afirmación en (2.22) obtenemos
$$\left\|\frac{u}{a}\right\|_{q(x)} \leq |\Omega| + 1,$$
luego,
$$\|u\|_{q(x)} \leq (|\Omega|+1)\|u\|_{p(x)},$$
por lo tanto, hemos demostrado que la inmersión
$$L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$
es continua.■

El espacio $W^{1,p(x)}(\Omega)$

2.4. El espacio $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Estudiaremos el espacio de Sobolev con exponente variable $W^{1,p(x)}(\Omega)$, definido por

$$“W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega),\ j = 1, 2, ..., N. \right\}''$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio.

Este espacio es muy importante en nuestro trabajo, pues sobre un subconjunto cerrado de este, encontraremos la solución débil del problema (I). Para $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, tenemos que $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ denota la $j-$ ésima derivada débil de u, osea $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, se cumple

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx$$

En este espacio, tenemos la siguiente norma

$$\|u\|_* = \|u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(x)}$$

Además

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

Por lo que tenemos

$$“W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \right\}''$$

y tiene a

$$“\|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|''_{p(x)}$$

como norma equivalente.

2.4.1. Propiedades del espacio $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Desarrollaremos las principales propiedades del espacio de Sobolev con exponente variable $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Teorema 8. *$W^{1,p(x)}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración.

Sea $\{u_n\} \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ una sucesión de Cauchy, entonces,

$$\{u_n\} \text{ y } \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right\}, \, j = 1, \ldots, N$$

son sucesiones de Cauchy en $L^{p(x)}(\Omega)$.

Como $L^{p(x)}(\Omega)$ es un espacio de Banach, existen $u, w_j \in L^{p(x)}(\Omega)$ tales que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \longrightarrow w_j, \text{ cuando } n \to \infty, j = 1, \ldots, N. \tag{2.23}$$

Usando la desigualdad de Hölder (ver Proposición 8), tenemos

$$\int_\Omega (u_n - u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \leq C \|u_n - u\|_{p(x)} \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\|_{q(x)}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.24}$$

donde $C = \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}$. De (2.23) y (2.24) tenemos

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \longrightarrow \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx, \text{ para } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \text{ cuando } n \to \infty \tag{2.25}$$

Análogamente,

$$\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \varphi dx \longrightarrow \int_\Omega w_j \varphi dx, \text{ para } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \text{ cuando } n \to \infty$$

Desde que

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \varphi dx, \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.26}$$

pasando al limite en (2.26) cuando $n \to \infty$ y usando (2.24) y (2.25), obtenemos

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega w_j \varphi dx, \text{ para } \varphi \in C_o^\infty(\Omega) \tag{2.27}$$

Usando el lema de Du Bois-Reymond en (2.27), concluimos que

$$u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \text{ y } w_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, N.$$

Luego, usando (2.23), tenemos

$$\|u_n - u\|_* = \|u_n - u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^N \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{p(x)} \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ es un espacio de Banach.■

Teorema 9. *El espacio* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *es separable y reflexivo, si* $p^{-1} > 1$.

Demostración.
Ver [23]pág. 33.■

Observemos que el espacio $E = \overbrace{L^{p(x)}(\Omega) \times \cdots \times L^{p(x)}(\Omega)}^{(N+1) \text{ veces}}$ provisto de la norma $\|\cdot\|$ es reflexivo y separable.

Definamos el operador lineal $T : W^{1,p(x)}(\Omega) \longrightarrow E$ por

$$T(u) = (u, \nabla u)$$

Notemos que

$$\|T(u)\| = \|u\|$$

por lo que $T\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)$ es un subespacio cerrado de E. Por Brezis [5], tenemos que $T\left(W^{1,p(x)}(\Omega)\right)$ es reflexivo y separable, por lo tanto, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ es reflexivo y separable.

Definición 1. *Definimos el espacio* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *como la clausura de* $C_0^\infty(\Omega)$ *en* $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Usaremos convenientemente las normas

$$\|u\| = \|\nabla u\|_{p(x)}, \ \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

pues son equivalentes en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Teorema 10. *El espacio* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *es un espacio de Banach, separable y reflexivo, si* $p^{-1} > 1$.

Demostración.
Ver Brezis [5]pág. 440.

2.4.2. Inmersiones

Existen resultados de inmersión que serán de gran utilidad posteriormente; entre estos resultados, equivalentes o generalizaciones de los teoremas de Sobolev, Rellich-Kondrachov y de la desigualdad del tipo Poincaré.

Teorema 11. *Si $p, q \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ tales que $q(x) \leq p(x)$, c.t.p. en Ω, entonces*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega),$$

obteniendo una inmersión continua de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ en $W^{1,q(x)}(\Omega)$,

$$i,e) \quad W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q(x)}(\Omega),$$

Demostración.

Supongamos: $q(x) \leq p(x)$, c.t.p. en Ω, entonces, por el corolario 2 la inmersión.

$$L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

es continua, es decir $\exists C > 0$ tal que

$$\|u\|_{q(x)} \leq C\|u\|_{p(x)}, \ \forall \ u \in L^{p(x)}(\Omega) \tag{2.28}$$

Como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

entonces

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega)$$

y por (2.28) concluimos que la imersión

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q(x)}(\Omega)$$

es continua.■

Proposición 9. *Sean $p, q \in C(\overline{\Omega})$ tales que $p^-, q^- \geq 1$.*

Si $q(x) \leq p^*(x)$ ($q(x) < p^*(x)$), $\forall x \in \overline{\Omega}$, entonces existe una inmersión continua y compacta

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega),$$

donde

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{N_{p(x)}}{N-p(x)}, & p(x) < N; \\ +\infty, & p(x) \geq N. \end{cases}$$

Demostración.

Sean $p, q \in C(\bar{\Omega})$, entonces existe una vecindad abierta para $x \in V_x \subset \bar{\Omega}$ tal que

$$q^+ (V_x) < \left(p^- (V_x)\right)^*$$

donde

$$q^{+}(V_x) = \sup\{q(y) : y \in V_x\} \text{ y } p^{-}(V_x) = \text{ínf}\{p(y) : y \in V_x\}$$

Si $\{V_x\}_{x\in\Omega}$ es una cobertura abierta del compacto $\bar{\Omega}$, entonces por el Teorema de Borel-Lebesgue, existen $V_1, \ldots, V_s$ tales que $\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{s} V_j$.

Denotamos

$$p_j^{-} = p_j^{-}(V_j) \text{ y } q_j^{+} = q_j^{+}(V_j), \quad j = 1, 2, ...s.$$

Si u es un elemento de $W^{1,p(x)}(\Omega)$, entonces u es elemento de $W^{1,p(x)}(V_j), j = 1, \ldots, s$

Por el teorema 10, podemos afirmar que

$$u \in W^{1,p_j^{-}}(V_j), j = 1, \ldots, s$$

y por los teoremas de Sobolev y de Rellich-Kondrachov, las siguientes inmersiones

$$W^{1,p_j^{-}}(V_j) \subset L^{q_j^{+}}(V_j), j = 1, \ldots, s \tag{2.29}$$

son continuas y compactas. Así mismo,

$$u \in L^{q_j^{+}}(V_j), j = 1, \ldots, s.$$

Por el Corolario 2, las inmersiones

$$L^{q_j^{+}}(V_j) \subset L^{q(x)}(V_j), j = 1, \ldots, s \tag{2.30}$$

son continuas. Luego,

$$u \in L^{q(x)}(V_j), j = 1, \ldots, s$$

entonces, $u \in L^{q(x)}(\Omega)$. Por lo tanto, $W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$.

Afirmación 1: La inmersión $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ es continua.

En efecto, sea (u_n) una sucesión en $W^{1,p(x)}(\Omega)$ que converge a 0. Como las inmersiones

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(V_j), j = 1, \ldots, s$$

son continuas, entonces

$$u_n \to 0 \text{ en } L^{q(x)}(V_j), j = 1, \ldots, s \tag{2.31}$$

De (2.31), tenemos

$$\int_{\Omega} |u_n(x)|^{q(x)}\, dx \leq \sum_{j=1}^{s} \int_{V_j} |u_n(x)|^{q(x)}\, dx \longrightarrow 0$$

Luego,

$$u_n \to 0 \text{ en } L^{q(x)}(\Omega)$$

Por lo tanto, la inmersión de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ en $L^{q(x)}(\Omega)$ es continua.

Afirmación 2: La inmersión $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ es compacta.

En efecto, sea $(u_n) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ acotada, entonces por el Teorema 10,

$$(u_n) \subset W^{1,p_j^-}(V_j), j = 1, \ldots, s$$

es acotada.

Por (2.29) y (2.30), (u_n) posee subsucesiones convergentes tales que

$$\begin{aligned}
&\{u_n^1\}_{n\in\mathbb{N}_1} \subset L^{q(x)}(V_1),\\
&\{u_n^2\}_{n\in\mathbb{N}_2} \subset L^{q(x)}(V_2),\\
&\cdots\\
&\{u_n^s\}_{n\in\mathbb{N}_x} \subset L^{q(x)}(V_s)
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{N}_s \subset \mathbb{N}_{s-1} \cdots \subset \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$. Ahora, consideramos la subsucesión

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{s} \chi_{\mathrm{V_j}} u_n^j(x), x \in \Omega, n \in \mathbb{N}_s,$$

entonces

$$\int_\Omega |v_m(x) - v_n(x)|^{q(x)}\, dx \leq \sum_{j=1}^{s} \int_{V_j} \left|u_m^j(x) - u_n^j(x)\right|^{q(x)} dx$$

Esta última tiende a cero, para $m, n \in \mathbb{N}_s$ suficientemente grandes. Luego, la subsucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}_x}$ es de Cauchy en $L^{q(x)}(\Omega)$, por tanto convergente, pues $L^{q(x)}(\Omega)$ es completo. Así, hemos demostrado que la inmersión

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

es compacta.■

Proposición 10. *Sean $p, q \in C(\overline{\Omega})$ son tales que:*

$$1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x),$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$, entonces existe una inmersión continua

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega).$$

Demostración.

Seguir las mismas ideas de la demostración del teorema 11. (Ver [12]pág. 34.)

Usaremos este resultado para demostrar una **desigualdad del tipo Poincaré**.

Proposición 11. *(Desigualdad de Poincaré). Si* $p \in C(\overline{\Omega})$ *tal que* $p^- > 1$*, entonces* $\exists C > 0$ *constante, tal que*

$$\|u\|_{p(x)} \leq C \|\nabla u\|_{p(x)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Demostración.

Definamos la biyección creciente $f : [0, N) \longrightarrow [0, +\infty)$ por

$$f(t) = \frac{Nt}{N - t}$$

cuya inversa es $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, N)$ definida por

$$g(s) = \frac{Ns}{N + s}.$$

Hacemos $p_o(x) := p(x)$ y $p_N(x) \equiv 1$. Para cada $j = 0, 1, \ldots, N-1$, definimos

$$p_{j+1}(x) = \text{máx}\left\{g\left(p_j(x)\right), 1\right\}, \text{ para } x \in \bar{\Omega}$$

del mismo modo, tenemos para $x \in \bar{\Omega}$,

$$p_{j+1}(x) < p_j(x) \leq p_{j+1}^*(x), j = 0, 1, \ldots, N-1, x \in \overline{\Omega} \tag{2.32}$$

Por el teorema 11 y (2.32), concluimos que cada una de las N inmersiones

$$W^{1,p_{j+1}(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_j(x)}(\Omega), \tag{2.33}$$

son continuas, y por el Corolario 2 y (2.32), también que las siguientes N inmersiones

$$L^{p_j(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_{j+1}(x)}(\Omega), \tag{2.34}$$

también son continuas.

Para $u \in W_o^{1,p(x)}(\Omega)$, usamos sucesivamente (2.33) - (2.34)y obtenemos

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} &\leq C_0 \left(\|\nabla u\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)}\right) \\ &\leq C_0' \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + C_0 \|u\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)} &\leq C_1 \left(\|\nabla u\|_{L^{p_2(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p_2(x)}(\Omega)} \right) \\
&\leq C_0' \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + C_0 \|u\|_{L^{p_2(x)}(\Omega)} \\
\|u\|_{L^{p_{N-1}(x)}(\Omega)} &\leq C_{N-1} \left(\|\nabla u\|_{L^{p_N(x)}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p_N(x)}(\Omega)} \right) \\
&\leq C_{N-1}' \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + C_{N-1} \|u\|_{L^{p_N(x)}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Ahora, por la desigualdad de Poincaré en espacios de Sobolev (ver [5]), tenemos

$$
\|u\|_{L^{p_N(x)}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)} \leq C_N \|\nabla u\|_{L^{p_1(x)}(\Omega)} \leq C_N' \|\nabla u\|_{L^{p_N(x)}(\Omega)}
$$

Tomando convenientemente las desigualdades, obtenemos el resultado deseado.■

Observación 1. *Una consecuencia de la desigualdad de Poincaré, nos dice que las normas* $\|u\|_{p(x)}$ *y* $\|\nabla u\|_{p(x)}$ *son equivalentes en* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, *es decir,*

$$
\|\nabla u\|_{p(x)} \leq \|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \leq (C+1)\|\nabla u\|_{p(x)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)
$$

El operador $p(x)-$ Laplaciano $\left(\Delta_{p(x)}\right)$

2.5. El operador $p(x)-$ Laplaciano

Introducimos el operador $p(x)-$ Laplaciano, definido de la siguiente manera

$$\Delta_{p(x)}u = div\Big(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\Big)$$

2.5.1. Propiedades del operador $p(x)-$ Laplaciano

Por comodidad, denotaremos $X = W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Así tenemos las principales propiedades del operador $p(x)-$ Laplaciano.

Teorema 12. *El funcional $f : X \to \mathbb{R}$ definido por*

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx$$

es de clase $C^1(X, \mathbb{R})$.

Demostración.
Para demostrar que el funcional $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, es suficiente probar que la derivada de Gateaux de J existe y es continua.

Existencia de la derivada de Gateaux. Sean $u, v \in X$. Dados $x \in \Omega$ y $0 < |t| < 1$ por el TVM $\exists\lambda(x,t) = \lambda \in (0,1)$ tal que

$$\frac{|\nabla u + t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} = |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v$$

Observemos que

$$h := |\nabla u + \lambda t \nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t \nabla v)\nabla v \longrightarrow |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v, \text{ c.t.p. en } \Omega \tag{2.35}$$

cuando $t \to 0$.

además

$$|h| \leq |\nabla u + \lambda t \nabla u|^{p(x)-1}|\nabla v| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| \tag{2.36}$$

como

$$|\nabla u|, |\nabla v| \in L^{p(x)}$$

entonces,

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega)$$

Por la desigualdad de Hölder,tenemos

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega) \tag{2.37}$$

Luego, usando (2.35)-(2.37) y el Teorema de la Convergencia Dominada, obtenemos

$$J'(u).v = \lim_{t \to 0} \int_\Omega \frac{|\nabla(u + tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx$$

Continuidad de la derivada de Gateaux. Sea $\{u_n\} \subset X$ tal que $u_n \to u$ en X. Así mismo,

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \text{ en } \left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^N \tag{2.38}$$

Luego, por el Corolario 1, existe una subsucesión, $\{u_n\}$, y la función $g \in L^{p(x)}(\Omega)$ tal que

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x), \text{ c.t.p. en } \Omega \tag{2.39}$$

y

$$|\nabla u_n(x)| \leq g(x), \text{ c.t.p. en } \Omega \tag{2.40}$$

Por (2.39), tenemos que

$$|\nabla u_n(x)| \longrightarrow |\nabla u(x)|, \text{ c.t.p. en } \Omega \tag{2.41}$$

Para todo $v \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} |(J'(u_n) - J'(u), v)| &= \left| \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \right) \nabla v dx \right| \\ &\leq \int_\Omega \left| |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \right| |\nabla v| dx \end{aligned}$$

Si

$$f_n := \Big| \, |\nabla u_n|^{p(x)-2} \, \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \Big|, \; n \in \mathbb{N} \tag{2.42}$$

entonces

$$f_n \leq |\nabla u_n|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1}, \; n \in \mathbb{N} \tag{2.43}$$

Observemos que

$$\left(|\nabla u_n|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1} \right) \in L^{q(x)}(\Omega)$$

donde

$$q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$$

Luego, por (2.42) podemos concluir

$$\{f_n\} \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

Aplicando la desigualdad de Hölder en (2.42), tenemos

$$\begin{aligned} |(J'(u_n) - J'(u), v)| &\leq C \, \|f_n\|_{q(x)} \, ||\nabla v\|_{p(x)} \\ &\leq C||f_n \, \|_{q(x)} \| \, v\| \end{aligned}$$

así, tenemos

$$\|J'(u_n) - J'(u)\| \leq C \, \|f_n\|_{q(x)} \tag{2.44}$$

Ahora aplicando (2.39) y (2.41) en (2.43), obtenemos

$$f_n(x) \to 0, \; \text{c.t.p. en } \Omega \tag{2.45}$$

De (2.40) y (2.44), tenemos que

$$f_n(x) \leq g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1} \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

Entonces,

$$f_n(x)^{q(x)} \leq 2^{q^+} \left(g(x)^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)} \right) \in L^1(\Omega), \; \text{c.t.p. en } \Omega \tag{2.46}$$

Aplicando (2.45), (2.46) y del Teorema de la Convergencia Dominada, resulta que

$$\int_\Omega f_n^{q(x)} dx \longrightarrow 0, \; \text{cuando } n \longrightarrow \infty$$

luego,

$$\|f_n\|_{q(x)} \longrightarrow 0, \; \text{cuando } n \longrightarrow \infty$$

De esto y de (2.45), obtenemos

$$\|J'(u_n) - J'(u)\| \to 0, \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

o sea, la derivada de Gateaux J' es continua, con lo cual termina la demostración.■

Definimos el operador $L := J' : X \to X^*$, por

$$\langle L(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx, \forall u, v \in X.$$

El operador L tiene propiedades interesantes, y serán útiles para encontrar la solución débil del problema en estudio.

Teorema 13. *El funcional $L : X \to X^*$ es un operador*

(a) *continuo,*

(b) *acotado,*

(c) *estríctamente monótono, esto es,*

$$\langle L(u) - L(v), u - v\rangle > 0, \ \forall u, v \in X, con\, u \neq v$$

(d) *del tipo S^+, esto es,*

Si $u_n \rightharpoonup u$ y $\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle L(u_n) - L(u), u_n - u\rangle \leq 0$, entonces $u_n \to u$ en X.

(e) *un homeomorfismo.*

Demostración.

(a) Tenemos que $(L(u), v) = (J'(u), v)$, $\forall u, v \in X$. y como la derivada de Gateaux de J es continua, entonces L es continuo.

(b) Sea $B \subset X$ un conjunto acotado, entonces, $\exists k > 0$ constante, tal que

$$\|u\| \leq k, \forall u \in B \tag{2.47}$$

Si $u \in B$ y $v \in X$, entonces

$$|(L(u), v)| \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla v| dx \tag{2.48}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder en (2.48), tenemos

$$\|L(u)\| \leq C\|g\|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}, \forall u \in B \tag{2.49}$$

donde

$$g = |\nabla u|^{p(x)-1}$$

desde que

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \leq \|u\| \leq k, \forall u \in B$$

entonces existe $\widetilde{k} > 0$ tal que

$$\int_\Omega g(x)^{q(x)} dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx \leq \widetilde{k}$$

Por lo tanto, por (2.49), concluimos que L es acotado.

(c) Si $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, se cumplen las desigualdades:

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \geq \begin{cases} \frac{2^{3-p}}{p}|\xi - \eta|^p, & \text{si } p \geq 2 \\ (p-1)\frac{|\xi-\eta|^2}{(|\xi|^p+|\eta|^p)^{2-p}}, & \text{si } 1 < p < 2 \end{cases}$$

Sean $u, v \in X$ tales que $u \neq v$ entonces, $\nabla u \neq \nabla v$.

Consideremos los conjuntos

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : p(x) \geq 2\} \text{ y } \Omega_- = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < 2\}$$

La monotonicidad estricta de L se sigue haciendo $\xi = \nabla u$ y $\eta = \nabla v$ en las desigualdades anteriores e integrando sobre Ω_+ o Ω_-, para $p(x) \geq 2$ y para $1 < p(x) < 2$ respectivamente.

(d) Si $u_n \to u$ y $\lim_{n\to\infty} (L(u_n) - L(u), u_n - u) \leq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (L(u_n) - L(u), u_n - u) = 0$$

Si $p(x) \geq 2$, entonces

$$C_1 \int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \leq (L(u_n) - L(u), u_n - u) \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty$$

Si $1 < p(x) < 2$, entonces por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned} C_2 \int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx &= C_2 \int_{\Omega_-} \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} dx \\ &\leq C \|g_n\|_{\frac{2}{p(x)}} \|h_n\|_{\frac{2}{2-p(x)}} \end{aligned}$$

donde

$$g_n = \frac{|\nabla u_n - \nabla u|_{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}}$$

y

$$h_n = (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}$$

desde que $u_n \to u$ en X, entonces (u_n) es acotada. Luego, $\exists C_3 > 0$ constante, tal que

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n|^{p(x)}\, dx \leq C_3$$

Así mismo,

$$\begin{aligned}\rho_{\frac{2}{2-p}}(h_n) = \int_{\Omega_-} |h_n|^{\frac{2}{2-p(x)}}\, dx &= \int_{\Omega_-} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p(x)}\, dx \\ &\leq 2^{p^+} \int_{\Omega_-} |\nabla u_n|^{p(x)}\, dx + 2^{p^+} \int_{\Omega_-} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq C_4\end{aligned}$$

también

$$\rho_{\frac{2}{p(x)}}(g_n) = \int_{\Omega_-} |g_n|^{\frac{2}{p(x)}}\, dx \leq C_5 \left(L(u_n) - L(u), u_n - u\right) \longrightarrow 0 \tag{2.50}$$

cuando $n \to \infty$, de donde se obtiene

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\, dx \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$.

Luego,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\, dx = \int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\, dx + \int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\, dx \longrightarrow 0$$

Por lo tanto,

$$\|\nabla (u_n - u)\|_{p(x)} \longrightarrow 0$$

lo que implica,

$$\|u_n - u\| \longrightarrow 0 \text{ en } X$$

(e) Siendo L estríctamente monótono, entonces L es inyectivo.

Supongamos que $\|\nabla u\|_{p(x)} > 1$, entonces, por la proposición 6, tenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx \geq \|\nabla u\|^{p^-}_{p(x)^-} \tag{2.51}$$

Como consecuencia de la desigualdad de Poincaré (ver proposición 11), $\exists C > 0$ tal que

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \geq C\|u\| \tag{2.52}$$

luego, de (2.51) y (2.52), tenemos

$$\frac{\langle L(u), u\rangle}{\|u\|} = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx}{\|u\|} \geq \widetilde{C}\|u\|_{p(x)}^{p^- -1}$$

luego,

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle L(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty \tag{2.53}$$

osea, L es coercivo. Usando esta última propiedad, la continuidad y la monotonicidad de L, del Teorema de Minty-Browder concluimos, que L es sobreyectivo. Así mismo, existe el operador inverso

$$L^{-1} : X^* \longrightarrow X.$$

Demostraremos que L^{-1} es continuo.

En efecto, sea $\big(g_n\big) \subset X^*$ tal que $g_n \to g$ en X^*.

Consideremos

$$u_n = L^{-1}\left(g_n\right) \text{ y } u = L^{-1}(g)$$

siendo L una biyección, se tiene

$$L\left(u_n\right) = g_n \text{ y } L(u) = g \tag{2.54}$$

Por otro lado, tenemos

$$\frac{\langle L(u_n), u_n\rangle}{\|u_n\|} \leq \|g_n\|$$

Usando la acotación de $\big(g_n\big)$ y (2.54), podemos afirmar que $\big(u_n\big)$ es acotada en X. Siendo X un espacio de Banach reflexivo, entonces podemos suponer que

$$u_n \rightharpoonup u_0.$$

además

$$\langle L(u_n) - L(u_0), u_n - u_0\rangle = \langle g_n, u_n - u_0\rangle - \langle L(u_0), u_n - u_0\rangle$$

Además, se cumple

$$\langle g_n, u_n - u_0\rangle = \langle g_n - g, u_n - u_0\rangle - \langle g, u_n - u_0\rangle$$

ahora, tomando en cuenta las convergencias $\;g_n \to g\;$ y $\;u_n \rightharpoonup u_0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \langle L(u_n) - L(u_0), u_n - u_0\rangle = 0$$

Como L es del tipo (S_+), entonces

$$u_n \longrightarrow u_o \tag{2.55}$$

por ser L continuo, tenemos

$$L(u_n) \longrightarrow L(u_o)$$

tomando en cuenta (2.55), obtenemos

$$L(u) = L(u_o)$$

como L es inyectivo, entonces $u = u_o$, luego de (2.55) obtenemos que

$$u_n \longrightarrow u \text{ en } X,$$

mostrando que L^{-1} es continuo. Por lo tanto, L es un homeomorfismo.$\blacksquare$

3 Marco metodológico

En el presente trabajo estudiamos los espacios generalizados de Lebesgue y Sobolev, vinculados a problemas elípticos sobre dominios acotados Ω de $\mathbb{R}^N$ que involucran al operador $p(x)-$ Laplaciano. Estudiar los espacios mencionados es importante por que brindan la estructura necesaria para resolver problemas elípticos con determinadas condiciones de crecimiento. Las demonstraciones pueden encontrarse en Fan [10] y Guimar$\tilde{a}$es [23] entre otros autores.

Usaremos el Método variacional mixto, multiplicadores de Lagrange, Teorema de Sobolev-Slobodeckij, Teoremas relacionados con la inmersión y compacidad en espacios generalizados, además del método de Galerkin. Nos ubicamos en el marco del estudio cualitativo de las ecuaciones integrodiferenciales parciales elípticas de tipo $p(x)-$ Kirchhoff.

La metodología basada en la formulación débil con multiplicadores de Lagrange, es la que desarrollamos en esta tesis, esta metodología es expresada como un problema variacional mixto abstracto, haciendose necesaria la definición de dos operadores.

La formulación variacional del problema planteado es dada por los problema 1 y problema 2, resolvemos el primero aplicando el TPF de Schauder, y luego de demostrar el problema 2, garantizamos que la solución débil del problema (I) planteado es única.

3.1. Hipótesis central de la investigación

Dado el problema de contacto del tipo $p(x)-$ Kirchhoff (I), consideramos que, existe y es única la solución débil de (I), en el espacio de Banach definido en

$$X = \left\{ u \in W^{1,p(x)}(\Omega) : u|_{\Gamma} \right\}$$

con $2 \leq p(x) \leq +\infty$, cumpliendo las siguientes condiciones:
$f_0 \in L^{q(x)}(\Omega)$ con condición nula sobre una parte Γ_1 de la frontera y no nulas en las

otras dos partes Γ_2 y Γ_3 de la frontera, con $f_2 \in L^{q(x)}(\Gamma_2)$ y $g \in L^{q(x)}(\Gamma_3)$, $g(x) \geq 0$ c.t.p. en Γ_3 sobre un conjunto abierto y acotado con suficiente regularidad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, donde q es el conjugado de p, es decir,

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$$

además $M : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz, creciente y continua con la siguiente propiedad $M(s) \geq m_0 > 0$.

3.2. Variables e indicadores de la investigación

3.2.1. Variable independiente

PVF no lineal asociado a la mecánica de contacto del tipo $p(x)-$ Kirchhoff.

3.2.2. Variable dependiente

Existencia única de la solución débil del PVF.

3.3. Métodos de la investigación

Seguiremos el método hipotético deductivo, el cual es un enfoque utilizado en la investigación científica para crear, probar y explicar fenómenos naturales. Este método se basa en la lógica deductiva, donde se parte de una premisa general (la hipótesis) y se derivan conclusiones específicas (las predicciones) que pueden ser verificadas o refutadas mediante la observación y la experimentación. Establecemos dos etapas:

a) Formulación de hipótesis: Iniciamos con la formulación de una hipótesis, la cual es una suposición o explicación tentativa acerca del fenómeno en estudio.

b) Deducción de consecuencias: A partir de la hipótesis, se deducen las consecuencias que deberían observarse si la hipótesis es cierta. Estas consecuencias se expresan mediante los problemas 1 y 2 planteados, los que posteriormente se verifican a través de su demostración.

El presente trabajo está dentro de la clasificación de investigación básica o fundamental, puesto que buscamos ampliar los conocimientos y las teorías relacionadas con la teoría de operadores en EDP y los multiplicadores de Lagrange asociados al problema (I). Según el tratamiento de las variables, es considerado no experimental, y por su duración, es de naturaleza transversal, dado que se recolectó información de publicaciones especializadas a lo largo de todo el proceso de investigación.

3.4. Diseño o esquema de la investigación

Contrastamos la hipótesis, aplicado el método variacional mixto, multiplicadores de Lagrange, teorema de Sobolev-Slobodeckij, teoremas de inmersión, compacidad y el método de Galerkin, estableciendo una relación entre la variable independiente (PVF de contacto del tipo $p(x)-$ Kirchhoff) con la variable dependiente (Existencia y unicidad de la solución débil).

3.5. Población y muestra

Nos limitamos a una población definida en los espacios generalizados de Sobolev y el espacio de Banach

$$X = \left\{ u \in W^{1,p(x)}(\Omega) : u|_{\Gamma} \right\}$$

con $2 \leq p(x) \leq +\infty$. Mientras que para la muestra se considera el modelo planteado por el problema de contacto del tipo $p(x)-$ Kirchhoff (I).

3.6. Actividades del proceso investigativo

Para el desarrollo de las actividades durante el proceso investigativo se aplicaron tres fases:

3.6.1. Fase inicial

Durante esta fase, se llevó a cabo una labor descriptiva y exploratoria de los datos a analizar. Posteriormente, se recopiló de manera exhaustiva la información de revistas, artículos especializados, lo que facilitó el desarrollo del presente trabajo de investigación.

3.6.2. Fase intermedia

En esta fase, se llevó a cabo la formulación variacional mixta, luego discutimos la existencia y unicidad de la solución débil del problema variacional mixto, haciendo una revisión rápida a la estabilidad de la solución, después aplicamos los resultados abstractos para estudiar la solución débil y única del problema del valor límite que se está considerando.

3.6.3. Fase final

Finalmente se verificaron las hipótesis mediante la demostración de los problemas 1 y 2 planteados. Evidentemente se demostró la existencia y unicidad de la solución débil del problema abstracto, la que contribuyó para mostrar la existencia y unicidad de la solución débil del problema de contacto (I).

3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación

La información fue recopilada desde articulos, revistas y libros especializados relacionados con el problema en estudio.

Para la variable independiente, se revisaron los diversos temas mencionados en el marco teórico, relacionados con el problema (I) planteado.

Para la variable dependiente, se relacionaron diferentes trabajos referentes al tema, métodos empleados anteriormente por otros investigadores, logrando la eficacia del método aplicado en el trabajo de investigación.

Validación de los instrumentos, la eficacia de los instrumentos se realizó mediante el uso de teoremas del Análisis Funcional, utilizando la teoría de punto fijo y de operadores, en particular el TPF Schauder y operadores hemicontinuos,con lo cual se garantizó la existencia y unicidad de la solución para el PVF elíptico no lineal dado en (I).

3.8. Procedimiento para la recolección de datos

(Validación y confiabilidad de los instrumentos) La UNS como universidad licenciada por la Sunedu, dá la validación de los datos que se recopilaron para el presente trabajo de tesis.

3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de los datos

Para procesar y analizar los datos recopilados sobre las variables del PVF del problema de contacto tipo $p(x)-$ de Kirchhoff, se han empleado principalmente métodos de demostración obtenidos a través de la revisión de literatura especializada, incluyendo libros y artículos relacionados con el tema. Se han utilizado resultados de la teoría de los espacios generalizados de Sobolev, teoría de operadores y resultados importantes del análisis funcional. Posteriormente, demostramos los problemas 1 y 2. Como resultado, se demostró la existencia y unicidad de la solución débil para el modelo de contacto estudiado.

Es importante destacar que la obtención de la unicidad de la solución débil para el PVF no lineal se debe a la aplicación de la teoría de operadores hemicontinuos, así como a un resultado de compacidad e inmersiones en espacios de generalizados de Sobolev.

4 Resultados y discusión

4.1. Introducción

En el presente trabajo consideramos una clase de problema de contacto friccional del tipo $p(x)-$Kirchhoff. Aplicamos la técnica de Multiplicadores de Lagrange en una versión abstracta y el teorema del punto fijo de Schauder para probar la existencia de una solución débil.

El siguiente problema de valores en la frontera (PVF), nos muestra un modelo no lineal asociado a la mecánica de contacto, estamos interesados en demostrar la existencia y unicidad de la solución débil del modelo (I) que planteamos a continuación:

$$(I) \qquad \left|\begin{array}{l} -M\Big(L(u)\Big)\Delta_{p(x)}u = f_1(x,u), \quad \text{en } \Omega. \\ \\ u = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1. \\ \\ M\Big(L(u)\Big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f_2(x), \quad \text{sobre } \Gamma_2. \\ \\ M\Big(L(u)\Big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \leq g(x), \quad \text{sobre } \Gamma_3. \\ \\ M\Big(L(u)\Big)\big|\nabla u\big|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(x)\dfrac{u(x)}{|u(x)|}, \quad \text{si } u \neq 0 \text{ sobre } \Gamma_3. \end{array}\right.$$

donde $2 \leq p(x) \leq +\infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado con frontera suficientemente suave o regular, dividida en tres partes medibles Γ_1, Γ_2 y Γ_3 con medidas positivas, ν es el vector normal exterior donde $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$, M una función localmente Lipschitz continua y las funciones f_1, f_2 y g definidas convenientemente para objeto del estudio, asi como el funcional

$$L(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\big|\nabla u\big|^{p(x)}dx.$$

Este problema modela la deformación por cizallamiento antiplano de un cuerpo cilíndrico de material elástico no lineal, en contacto por fricción en Γ_3 con un obstáculo rígido. En este contexto Ω es la sección transversal de un cuerpo en $\mathbb{R}^2$, que es un cilindro muy largo.

Es importante observar que se pueden indicar estados de cizallamiento antiplano en el sólido cargandolo de una manera especial, cosa que rara vez ocurre en la práctica. Sin embargo las deformaciones por cizallamiento antiplano son unas de las clases más simples de deformaciones que puedan sufrir los sólidos; en el cizallamiento antiplano (o cizallamiento longitudinal) de un cuerpo cilíndrico el desplazamiento es paralelo a los generadores del cilindro y es independiente a la coordenada axial, por esta razón los problemas antiplano juegan un papel muy útil como problema piloto (modelo).

En nuestro modelo la función $u(x_1, x_2)$ representa la tercera componente del vector desplazamiento $\overrightarrow{u}$, es así que una vez calculado u podemos determinar el tensor de tensión.

En la ecuación de equilibrio $f_1 = f_1(x, u)$ es la densidad de las fuerzas actuando en Ω y f_2 es la densidad de tracción superficial. Las condiciones de contacto son obtenidas mediante la ley friccional de Tresca; además tenemos una condición de Dirichhet homogénea en Γ_1, así el cuerpo esta sujeto o fijo en Γ_1.

Resolver problemas de valor en la frontera que modelan el complejo fenómeno de interacción entre un cuerpo deformable y un obstáculo en términos de Multiplicadores de Lagrange, es una tarea desafiante. El uso de esta técnica está motivada por la posibilidad de aplicar métodos numéricos modernos que permitan una aproximación eficiente a la solución débil del problema.

Introducimos el siguiente subespacio cerrado de $W^{1,p(x)}(\Omega)$

$$X = \{v \in W^{1,p(x)}(\Omega) : \gamma u = 0 \quad \text{c.t.p. sobre} \quad \Gamma_1\} \tag{4.1}$$

donde γ denota al operador trazo de Sobolev, $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ con $med(\Gamma_1) > 0$; X resulta ser un espacio de Banach separable y reflexivo, bajo la norma

$$\|u\|_X = |\nabla u|_{p(x)}, \qquad u \in X.$$

Proposición 12. *Existe $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_{1,p(x)} \leq C\|u\|_X \quad \textit{para todo } u \in X.$$

Entonces, las normas $\|.\|_X$ y $\|.\|_{1,p(x)}$ son equivalentes sobre X.

Proposición 13. *Sea $L : X \to \mathbb{R}$ una funcional convexa y $L' : X \to X'$ es una aplicación estrictamente monótona, homeomorfismo acotado, y operador del tipo (S_+), con X' espacio dual de X, entonces*

$$u_n \rightharpoonup u \ \textit{y} \ \limsup_{n\to+\infty} L'(u_n)(u_n - u) \leq 0 \ \textit{implica} \ u_n \to u,$$

con

$$L(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left|\nabla u\right|^{p(x)} dx.$$

Este resultado se obtiene de manera similar a la dada en [9], por lo que omitimos los detalles.

Como de costumbre $p'(x)$ es la función conjugada de $p(x)$;

i.e)

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1, \qquad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

También definimos el espacio de Banach real y reflexivo

$$S = \left\{u \in W^{\frac{1}{p'(x)},p(x)}(\Gamma) : \exists v \in X \quad \text{tal que} \quad u = \gamma v \quad \text{c.t.p. sobre} \quad \Gamma\right\} \tag{4.2}$$

donde

$$Y = S', \text{es el dual del espacio } S. \tag{4.3}$$

Por otro lado introducimos la forma bilineal

$$\begin{aligned} b : X \times Y \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \quad \text{definida por} \\ b(v,u) \quad &= \quad \langle\, u, \gamma v \,\rangle_{Y\times S}\,, \end{aligned} \tag{4.4}$$

un multiplicador de Lagrange $\lambda \in Y$,

$$\langle\, \lambda, z \,\rangle = -\int_{\Gamma_3} M\Big(L(u)\Big)|\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial z} z d\Gamma \quad , \quad \forall z \in S$$

y el conjunto de multiplicadores de Lagrange

$$\Lambda = \left\{\mu \in Y : \langle\, \mu, z \,\rangle \leqslant \int_{\Gamma_3} g(x)|z(x)|d\Gamma, \quad \forall z \in S\right\} \tag{4.5}$$

de (I) deducimos que $\lambda \in \Lambda$.

4.2. Análisis de datos

4.2.1. Una formulación débil con multiplicadores de Lagrange

Sea u una función suficientemente regular que satisface el problema (I). Después de algunos cálculos y mediante el uso de resultados de densidad, obtenemos

$$M\Big(L(u)\Big)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f_1(x,u)v dx +$$

$$+\int_{\Gamma_2} f_2(x)\gamma v d\Gamma + M\Big(L(u)\Big)\int_{\Gamma_3}|\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu}\gamma v d\Gamma \tag{4.6}$$

donde u satisface (I) sobre Γ_3.

Mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange, lo expresamos como un problema variacional mixto abstracto, para tal fin definimos los siguientes operadores:

$$\begin{aligned}
&i)\ A : X \to X', \text{dado por}\\
&\langle\ Au, v\ \rangle = M\Big(L(u)\Big)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla v dx,\ \ u,v\in X.\\
&ii)\ F : X \to X', \text{dado por}\\
&\langle\ F(u), v\ \rangle = \int_\Omega f_1(x,u)v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(x)\gamma v dx, \quad u,v\in X.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Entonces, llegamos a la siguiente formulación variacional del problema (I), dada en los siguientes problemas

Problema 1.

Hallar u en el espacio de Banach X y un λ elemento del conjunto de multiplicadores de Lagrange Λ tal que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
\langle\ Au, v\ \rangle + b(v,\lambda) &= \langle\ F(u), v\ \rangle, \quad , \quad \forall v\in X \qquad (4.8)\\
b(u,\mu-\lambda) &\leq 0, \quad \forall \mu \in \Lambda \subseteq Y
\end{aligned}$$

Para resolver el problema 1, haremos uso del TPF de Schauder.

Procedemos a, "congelar" la variable estado u en el operador F, es decir, fijamos $w\in X$ y luego consideramos el siguiente problema.

Problema 2.

Dada una función f en el espacio dual de X. Encuentre $u \in X$ y $\lambda \in \Lambda$ tales que:

$$\begin{aligned} \langle\, Au, v \,\rangle + b(v,\lambda) &= \langle\, f, v \,\rangle \quad , \quad \forall v \in X \\ b(u, \mu - \lambda) &\leq 0 \quad \forall \mu \in \Lambda \subseteq Y. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para probar la unicidad de la solución del problema 2, consideramos resultados supuestos generalizados.

4.3. Interpretación de datos

Sean $(X, \|.\|_X)$ y $(Y, \|.\|_Y)$ dos espacios de Banach reflexivos reales.

(B_1) $A : X \to X'$ es hemicontinuo;

(B_2) $\exists h : X \to \mathbb{R}$ tal que

(i) $h(tw) = t^{\gamma} h(w)$ con $\gamma > 1$, $\forall t > 0, w \in X$;

(ii) $\langle\, Au - Av, u - v \,\rangle_{X \times X} \geq h(v - u),\ \forall u, v \in X$;

(iii) $\forall (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq X : x_\nu \rightharpoonup x$ en X $\Longrightarrow h(x) \leq \lim_{\nu \to \infty} \sup h(x_\nu)$

(B_3) A es coercivo.

(B_4) La forma $b : X \times Y$ es bilineal, y

(i) $\forall (u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq X : u_\nu \rightharpoonup u$ en $X \Longrightarrow b(u_\nu, \lambda) \to b(u, \lambda),\ \forall \lambda \in Y.$

(ii) $\forall (\lambda_\nu) \subseteq Y : \lambda_\nu \rightharpoonup \lambda$ en $Y \Longrightarrow b(v, \lambda_\nu) \to b(v, \lambda),\ \forall v \in X.$

(iii) $\exists\, \widehat{\alpha} > 0 : \inf_{\mu \in I \quad u \neq 0} \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \dfrac{b(v, \mu)}{|v|_X |\mu|_Y} \geq \widehat{\alpha}.$

(B_5) Λ es un subconjunto convexo cerrado y acotado de Y tal que $0_Y \in \Lambda$.

(B_6) $\exists C_1 > 0, q > 0 : h(v) \geq C_1 \|v\|_X^q, \quad \forall v \in X.$

Teorema 14. *Sean $(X, \|.\|_X)$ y $(Y, \|.\|_Y)$ dos espacios de Banach reflexivos reales. Supongamos que se cumplen las condiciones $(B_i), i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ entonces el problema 2 posee solución única.*

Demostración.
Ver [Matei A., (2024)].■

Demostramos el problema 1, asumiendo las condiciones para M, f_1, f_2 y g:

(A_1) $M : [0, +\infty[\to [m_0, +\infty[$ es una función no decreciente, localmente Lipschitz - continua, con $m_0 > 0$.

(A_2) La función $f_1 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Caratheodory tal que

$|f_1(x,t)| \leq c_1 + c_2|t|^{\alpha(x)-1}$, $\forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \alpha \in C_+(\overline{\Omega}), \text{para} \alpha(x) < p^*(x), \alpha^+ < p^-$

y $\exists C_3 > 0$ tal que:

$$(f(x,s) - f(x,t)).(s-t) \leq C_3|s-t|^{p^-}, \forall x \in \Omega, \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

(A_3) $f_2 \in L^{p'(x)}(\Gamma_2), g \in L^{p'(x)}(\Gamma_3), g(x) \geq 0$ c.t.p. sobre Γ_3.

El operador $A : X \to X'$ cumple las siguientes propiedades que se dan en la siguiente proposición

Proposición 14. *Si (A_1) se cumple, entonces*

(a) A es localmente Lipschitz continua.

(b) A es acotado, estrictamente monótono. Además

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq k_p \|u - v\|_X^{\hat{p}}$$

donde

$$\hat{p} = \begin{cases} p^- & si\ \|u-v\|_X > 1, \\ p^+ & si\ \|u-v\|_X \leq 1. \end{cases}$$

De este modo, podemos tomar $h(v) = k_p \|v\|_X^{\hat{p}}$.

(c) $\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_X} \to +\infty$ *cuando* $\|u\|_X \to +\infty$.

Demostración:

(a) Asumimos que M es Lipschitz en $[0, R_1]$ con constante de Lipschitz L_M, $R_1 > 0$. Tomamos $u, v, w \in B(0, R_1)$

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, w\rangle =& [M(L(u)) - M(L(v))] \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla v\, dx \\ &+ M(L(v)) \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\right).\nabla w\, dx.\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de H$\acute{}$older, continuidad de la función de Lipschitz M, y la desigualdad $\langle||x|^{\alpha-2}x - |y|^{\alpha-2}y, x-y\rangle| \leq c|x-y|\,(|x|+|y|)^{\alpha-2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, 2 \leq \alpha < +\infty$, obtenemos la siguiente desigualdad

$$|\langle Au - Av, w\rangle| \leq C\|u - v\|_X \|w\|_X,$$

lo cual implica

$$\|Au - Av\|_{X'} \leq C\|u - v\|_X.$$

(b) La funcional $S : X \to X'$ definida por

$$\langle Su, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u.\nabla v\, dx, \qquad \forall u, v \in X, \tag{4.10}$$

es acotada (ver [9]). Entonces

$$\langle Su, v\rangle = M(L(u))\langle Su, v\rangle \qquad \forall u, v \in X. \tag{4.11}$$

Dado que M es continua y L está acotada, entonces A está acotada. Para obtener que A sea estríctamente monótono desarrollamos los mismos argumentos dados en [**?**].

Para establecer la desigualdad en (b), aplicamos el Lema 3 dado en [4] y obtenemos

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u - v\rangle \geq& \int_\Omega \Big(M(L(u))|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - M(L(v))|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\Big).(\nabla v - \nabla u)\, dx \\ \geq& m_0 \int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u - \nabla u|^{p(x)})\, dx \geq \frac{m_0}{p^+}\int_\Omega |\nabla u - \nabla u|^{p(x)}\, dx \\ \geq& \frac{m_0}{p^+}\|u - v\|_X^{\hat{p}}.\end{aligned}$$

(c)Para $u \in X$ con $\|u\|_X > 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} =& \frac{M\Big(L(u)\Big)\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx}{\|u\|} \\ \geq& m_0\|u\|_X^{p^- -1} \to +\infty \text{ cuando } \|u\|_X \to +\infty.\blacksquare\end{aligned}$$

Para mostrar nuestro resultado principal, consideramos los espacios de Banach, X, Y dados en (4.1) y (4.3) respectivamente, y el conjunto Λ en (4.5).

Proposición 15. *La forma $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida en (4.4) es bilineal y verifica (i), (ii) y (iii) de (B_4). Además*

$$\begin{aligned} b(u,\mu) &\leq \int_{\Gamma_3} g(x)|u(x)|\,d\Gamma \text{ para todo } \mu \in \Lambda; && (4.12)\\ b(u,\lambda) &= \int_{\Gamma_3} g(x)|u(x)|\,d\Gamma && (4.13)\\ b(u,\mu-\lambda) &\leq 0 \quad \text{para todo } \mu \in \Lambda. && (4.14)\end{aligned}$$

Entonces, Λ es un subconjunto convexo cerrado acotado de Y tal que $0_Y \in \Lambda$.

Demostración.

Las afirmaciones (i), (ii), (iii) y Λ acotada son idénticas a lo mostrado en [6], Teorema 3, páginas 138-139. Es fácil comprobar (4.12) y para justificar (4.13), tenemos que mostrar que se cumple para $x \in \Omega$ en c.t.p.

$$-M\Big(L(u)\Big)|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}u(x) = g(x)|u(x)|$$

De hecho, sea $x \in \Omega$.

Si $|u(x)| = 0$, entonces

$$-M\Big(L(u)\Big)|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}u(x) = 0 = g(x)|u(x)| \text{ sobre } \Gamma_3.$$

Si $|u(x)| \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} -M(L(u))|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}u(x) &= g(x)\frac{(u(x))^2}{|u(x)|}\\ &= g(x)|u(x)| \text{ sobre } \Gamma_3 \end{aligned}$$

Además, para todo $\mu \in \Lambda$:

$$b(u,\mu-\lambda) = b(u,\mu) - b(u,\lambda) = \langle\, \mu, \gamma u \,\rangle_{Y\times S} - \langle\, \lambda, \gamma u \,\rangle_{Y\times S}\,. \tag{4.15}$$

Por lo tanto, gracias a (4.12), (4.13) y (4.14), obtenemos (4.15). ■

4.4. Interpretación de los resultados

4.4.1. Existencia y unicidad de la solución débil

Estamos listos para resolver el problema 1. Para esto, consideramos los espacios de Banach X y Y dados en (4.1) y (4.2) respectivamente, la forma $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida en (4.3) y el conjunto Λ en (4.4).

Teorema 15. *Supongamos válidas las siguientes condiciones*

(A_1) $M : [0, +\infty[\to [m_0, +\infty[$ *es una función no decreciente, localmente Lipschitz - continua, con* $m_0 > 0$.

(A_2) *La función* $f_1 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es de Caratheodory tal que* $\forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ *satisface*

$$|f_1(x,t)| \leq c_1 + c_2 |t|^{\alpha(x)-1},\ para \alpha \in C_+(\overline{\Omega}),\ con \alpha(x) < p^*(x) y \alpha^+ < p^-.$$

(A_3) $f_2 \in L^{p'(x)}(\Gamma_2), g \in L^{p'(x)}(\Gamma_3), g(x) \geq 0$ *c.t.p. sobre* Γ_3.

Entonces, el problema 1 *tiene solución única* $(u, \lambda) \in X \times \Lambda$.

Demostración:
Aplicamos el TPF Schauder y "congelamos" la variable de estado u en la función F. i,e) elegimos $w \in X$ fijo arbitrario y consideramos el siguiente problema:
Encuentre $u \in X$ y $\lambda \in \Lambda$ tales que:

$$\langle\ Au, v\ \rangle + b(v, \lambda) \quad = \quad \langle\ f, v\ \rangle \quad , \quad \forall v \in X \tag{4.16}$$

$$b(u, \mu - \lambda) \quad \leq \quad 0 \quad \forall \mu \in \Lambda \subseteq Y. \tag{4.17}$$

con $f = F(w) \in X'$. Según las hipótesis sobre α y f_1, dadas en (A_2), podemos inferir que $f_1(w) \in L^{\alpha'(x)}(\Omega) \hookrightarrow X'$.

Según el teorema 14, el problema dado por (4.16)-(4.17) tiene solución única $(u_w, \lambda_w) \in X \times \Lambda$. Aquí por simplicidad quitamos el subíndice w, luego, haciendo $v = u$ en (4.16), $\mu = 0_Y$ en (4.17) y usando la proposición 14(b), obtenemos

$$k_p \|u\|_X^{\hat{p}} \leq (2C_1 C_\alpha \|w\|_X^\sigma + 2C_2 C_\alpha |\Omega| + c_p |f_2|_{p'(x),\Gamma_2}) \|u\|_X \tag{4.18}$$

donde

$$\sigma = \begin{cases} \alpha^-, & \text{si } \|w\|_X > 1, \\ \alpha^+, & \text{si } \|w\|_X \leq 1. \end{cases}$$

y C_α es la constante de inmersión de $X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$,

entonces

$$\|u\|_X \leq [C(1 + \|w\|_X)]^{\frac{1}{p^- - 1}} \leq 1. \tag{4.19}$$

Por lo tanto,

$$\|u\|_X \leq 1.$$

Como $p^- > \alpha^+ + 1$, tenemos

$$t^{p^- - 1} - Ct^\sigma - C \to +\infty \quad \text{cuando} \quad t \to +\infty$$

Por lo tanto, existe algún $\bar{R}_1 > 0$ tal que

$$\bar{R_1}^{p^- - 1} - C\bar{R_1}^\sigma - C \geq 0 \tag{4.20}$$

de (4.19) y (4.20) inferimos que si $\|w\|_X \leq \bar{R}_1$ entonces $\|u\|_X \leq \bar{R}_1$.

Entonces, existe $R_1 = \min\{1, \bar{R}_1\}$ tal que

$$\|u\|_X \leq R_1 \quad \text{para todo } u \in X. \tag{4.21}$$

Para esta constante, definimos K como

$$K = \left\{ v : v \in L^{\alpha(x)}(\Omega), \|v\|_X \leq R_1 \right\}$$

que es un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de $L^{\alpha(x)}(\Omega)$.

Ahora definimos el operador

$$T : K \to L^{\alpha(x)}(\Omega), \qquad Tw = u_w$$

donde u_w es la primera componente del único par de la solución del problema (4.16) - (4.17), $(u_w, \lambda_w) \in X \times \Lambda$.

De (4.21) tenemos que: $\|Tw\|_X \leq R_1$, para todo $w \in K$, de este modo $T(K) \subseteq K \subseteq L^{\alpha(x)}(\Omega)$. Además, si $(u_\nu)_{\nu \geq 1}$ $(u_{w_\nu} \equiv u_\nu)$ es una sucesión acotada en K y por (4.21) también está acotada en X. En consecuencia, de la inmersión compacta $X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$,

$(Tw_\nu)_{\nu\geq 1}$ es relativamente compacto en $L^{\alpha(x)}(\Omega)$ y por lo tanto, en K.

Para probar la continuidad de T, tomamos una sucesión $(w_\nu)_{\nu\geq 1}$ en K tal que

$$w_\nu \to w \quad \text{fuertemente en} \quad L^{\alpha(x)}(\Omega) \tag{4.22}$$

y supongamos $u_\nu = Tw_\nu$, la sucesión $\{(u_\nu, \lambda_\nu)\}_{\nu\geq 1}$ satisface

$$\begin{aligned} \langle\, Au_\nu, v \,\rangle + b(v, \lambda_\nu) &= \langle\, F(w_\nu), v \,\rangle\,, \qquad \forall v \in X \\ b(u_\nu, \mu - \lambda_\nu) &\leq 0, \quad \forall \mu \in \Lambda. \end{aligned}$$

Usando (4.21)-(4.22) podemos extraer una subsucesión (u_{ν_k}) de (u_ν) y una subsucesión (w_{ν_k}) de (w_ν) tal que

$$\begin{gathered} u_{\nu_k} \longrightarrow u^* \text{ débilmente en } X, \\ u_{\nu_k} \longrightarrow u^* \;\text{ fuertemente en }\; L^{\alpha(x)}(\Omega) \;\text{ c.t.p. en }\; \Omega, \\ w_{\nu_k} \longrightarrow w \quad \text{c.t.p. en } \Omega, \\ L(u_{\nu_k}) \longrightarrow t_0, \;\text{ para algún } t_0 \geq 0, \end{gathered} \tag{4.23}$$

y en vista de la continuidad de M

$$M(L(u_{\nu_k})) \longrightarrow M(t_0). \tag{4.24}$$

Por demostrar que $u^* = Tw$.

En efecto, elegimos a $u_{\nu_k} - u^*$ como función de prueba, luego tenemos

$$\begin{gathered} \langle\, Au_{\nu_k}, u_{\nu_k} - u^* \,\rangle + b(u_{\nu_k} - u^*, \lambda_\nu) = \langle\, F(w_{\nu_k}), u_{\nu_k} - u^* \,\rangle \\ \langle\, Au^*, u_{\nu_k} - u^* \,\rangle + b(u_{\nu_k} - u^*, \lambda^*) = \langle\, F(w), u_{\nu_k} - u^* \,\rangle\,. \end{gathered} \tag{4.25}$$

Entonces

$$\begin{aligned} &[M(L(u^*) - M(L(u_{\nu_k})] \int_\Omega |\nabla u^*|^{p(x)-2}\nabla u^*.(\nabla u_{\nu_k} - \nabla u^*)\, dx + \\ &M(L(u_{\nu_k})) \int_\Omega (|\nabla u^*|^{p(x)-2}\nabla u^* - |\nabla u_{\nu_k}|^{p(x)-2}\nabla u_{\nu_k}).(\nabla u_{\nu_k} - \nabla u^*)\, dx + \\ &b(u_{\nu_k} - u^*, \lambda^* - \lambda_{\nu_k}) = \langle\, F(w) - F(w_{\nu_k}), u_{\nu_k} - u^* \,\rangle\,. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Puesto que, $b(u_{\nu_k} - u^*, \lambda^* - \lambda_{\nu_k}) \geq 0$ aplicar $\alpha + \beta \leq 0$, luego por la desigualdad $|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y \geq C|x-y|^p$, $p \geq 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} &m_0 C_p \int_\Omega |\nabla u_{\nu_k} - \nabla u^*|^{p(x)}\, dx + [M(L(u^*) - M(L(u_{\nu_k})] \int_\Omega |\nabla u^*|^{p(x)-2}\nabla u^*.(\nabla u_{\nu_k} - \nabla u^*)\, dx \\ &\leq |\,\langle\, F(w_{\nu_k}) - F(w), u_{\nu_k} - u^* \,\rangle\,| \end{aligned} \tag{4.27}$$

Pero, usando (4.27) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\Big|[M(L(u^*) - M(L(u_{\nu_k})] \int_\Omega |\nabla u^*|^{p(x)-2} \nabla u^*.(\nabla u_{\nu_k} - \nabla u^*)\, dx\Big| \\
&\leq \frac{\vartheta_{\nu_k}}{p^-}\Big| \int_\Omega |\nabla u^*|^{p(x)-2} \nabla u^*.(\nabla u_{\nu_k} - \nabla u^*)\, dx\Big| \to 0 \quad \text{cuando } k \to \infty,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

donde $\vartheta_{\nu_k} = \text{máx}\{\|u_{\nu_k}\|_X^{p^-}, \|u_{\nu_k}\|_X^{p^+}\} + \text{máx}\{\|u^*\|_X^{p^-}, \|u^*\|_X^{p^+}\}$ es acotado. Además, por (A_2), (4.23), la inmersión compacta de $X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$, y por el teorema de Krasnoselki, deducimos la continuidad del operador de Nemytskii

$$\begin{aligned}
N_{f_1} : L^{\alpha(x)}(\Omega) &\to L^{\alpha'(x)}(\Omega) \\
w &\longmapsto N_{f_1}(w),
\end{aligned} \tag{4.29}$$

dado por $(N_{f_1}(w))(x) = f_1(x, w(x)), \quad x \in \Omega.$

Por lo tanto,

$$\|f_1(w_{\nu_k}) - f_1(w)\|_{\alpha'(x)} \longrightarrow 0$$

De la definición de F y la convergencia anterior se deduce que

$$|\langle F(w_{\nu_k}) - F(w), u_{\nu_k} - u^* \rangle| \longrightarrow 0 \tag{4.30}$$

Así, de (4.27)-(4.29) concluimos que

$$u_{\nu_k} \longrightarrow u^* \quad \text{en } X$$

Dado que el posible límite de la sucesión $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ está determinado de forma única, entonces, toda la sucesión converge hacia $u^* \in X$.

Por lo tanto, por la convergencia fuerte

$$u_{\nu_k} \longrightarrow u*, \text{en} X$$

y por la inmersión continua $X \hookrightarrow L^{\alpha(x)}(\Omega)$, obtenemos $u^* = Tw \equiv u_w$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{b(v,\lambda)}{\|v\|_X} &= \frac{\langle F(w), v\rangle - \langle Au, v\rangle}{\|v\|_X} \leq \frac{\langle F(w), v\rangle}{\|v\|_X} + \|Au\|_{X'} \\
&\leq \frac{1}{\|v\|_X}\left[\int_\Omega f_1(x,w)v\, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(x)\gamma v\, d\Gamma\right] + L_A\|u\|_X + \|A0\|_{X'} \\
&\leq C(\|f_1(w)\|_{\alpha'(x)} + \|f_2\|_{p'(x),\Gamma_2} + \|A0\|_{X'} + 1)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Luego, usando la acotación del operador N_{f_1} y la sucesión $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$, y la propiedad inf-sup de la forma b, obtenemos $\|\lambda_\nu\|_Y \leq C$. Luego, la subsucesión

$$\lambda_\nu \rightarrow \lambda_0 \quad \text{converge débilmente en } Y$$

para algún $\lambda_0 \in Y$.

Entonces (u^*, λ^*) y (u^*, λ_0) son soluciones del problema (4.16)-(4.17). Así, por la unicidad $\lambda_0 = \lambda^* \equiv \lambda_w$, esto muestra la continuidad de T.

T es compacto. En efecto, sea $(w_\nu)_{\nu\geq 1} \subseteq K$ una sucesión acotada en $L^{\alpha(x)}(\Omega)$ y $u_\nu = T(w_\nu)$. Como $\exists C > 0 : \|w_\nu\|_X \leq C$ y la subsucesión nuevamente denotada por $(w_\nu)_{\nu\geq 1}$ tenemos que

$$w_\nu \longrightarrow w \quad \text{converge débilmente en}\, X$$

Por la inmersión compacta de X en $L^{\alpha(x)}(\Omega)$, se sigue que

$$w_\nu \rightarrow w \text{ fuertemente en } L^{\alpha(x)}(\Omega).$$

Ahora, siguiendo los mismos argumentos que en la demostración de la continuidad de T obtenemos

$$u_\nu = T(w_\nu) \rightarrow T(w) = u \quad \text{fuertemente en } X.$$

De este modo

$$T(w_\nu) \rightarrow T(w) \;\text{ fuertemente en }\; L^{\alpha(x)}(\Omega).$$

Por lo tanto, podemos aplicar el TPF Schauder, así T posee un punto fijo. Esto nos da una solución $(u, \lambda_0) \in X \times \Lambda$ del Problema 1, por lo que concluye la demostración.■

Para la unicidad de la solución del problema 1 dado en (4.8), necesitamos la siguiente hipótesis sobre el término no lineal f_1.

(A4) Existe $b_0 \geq 0$ tal que

$$(f_1(x,t) - f_1(x,s))(t-s) \leq b_0|t-s|^{p(x)} \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega,\, \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, nuestro resultado de unicidad dice lo siguiente:

Teorema 16. *Asumiendo que $(A1)-(A4)$ se cumplen, si además $2 \leq p(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}$, entonces (4.8) tiene una única solución débil siempre que*

$$\frac{k_p}{b_0 \lambda_*^{-1}} < 1,$$

donde

$$\lambda_* = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx}{\int_\Omega |u|^{p(x)}\, dx} > 0.$$

Demostración:

El teorema 15 nos garantiza la existencia de una solución débil $(u, \lambda) \in X \times \Lambda$. Sean $(u_1, \lambda_1), (u_2, \lambda_2)$ dos soluciones del problema 1 dado en (4.8). Considerando la formulación débil de u_1 y u_2 tenemos

$$\begin{aligned} \langle\, Au_i, v \,\rangle + b(v, \lambda_i) &= \langle\, F(u_i), v \,\rangle, \qquad \forall v \in X \\ b(u_i, \mu - \lambda_i) &\leq 0, \quad \forall \mu \in \Lambda \subseteq Y \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Eligiendo $v = u_1 - u_2$, $\mu = \lambda_2$ si $i = 1$ y $\mu = \lambda_1$ si $i = 2$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle\, Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \,\rangle + b(u_1 - u_2, \lambda_1 - \lambda_2) &= \langle\, F(u_1) - F(u_2), u_1 - u_2 \,\rangle \;, \forall v \in X \\ b(u_1 - u_2, \lambda_2 - \lambda_1) &\leq 0 \quad \forall \mu \in \Lambda \subseteq Y. \end{aligned} \tag{4.33}$$

resulta, que

$$\langle\, Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \,\rangle = \langle\, F(u_1) - F(u_2), u_1 - u_2 \,\rangle + b(u_1 - u_2, \lambda_2 - \lambda_1)$$

Así, usando (4.33) y repitiendo los mismos pasos usados para demostrar la proposición 14-(b) obtenemos

$$\begin{aligned} k_p \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^{p(x)}\, dx &\leq \Big|\, \langle\, f_1(u_1) - f_1(u_2), u_1 - u_2 \,\rangle \,\Big| \\ &\leq \Big| \int_\Omega (f_1(x, u_1) - f_1(x, u_2))(u_1 - u_2)\, dx \Big| \\ &\leq \int_\Omega |u_1 - u_2|^{p(x)}\, dx \leq b_0 \lambda_*^{-1} \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^{p(x)}\, dx \end{aligned}$$

En consecuencia, cuando

$$\frac{k_p}{b_0 \lambda_*^{-1}} < 1,$$

se sigue que $u_1 = u_2$. Lo cual completa la demostración.■

5 Conclusiones y/o sugerencias

En este trabajo de tesis consideramos un problema de contacto friccional del tipo $p(x)-$ Kirchhoff, que modela la deformación por cizallamiento antiplano de un cuerpo cilíndrico de material elástico no lineal en contacto por fricción de una parte de su frontera con un obstáculo rígido. En este caso (de cizallamiento antiplano) nuestro modelo a estudiar se simplifica bastante, pero a cambio el modelo es sumamente ilustrativo. Al ser los operadores de Kirchhoff y la no linealidad fuente ubicadas con exponentes variables (funciones dependientes de la variable especial), nuestro problema es general y lo ubicamos en el contexto de los espacios generalizados de Lebesgue y de Sobolev de exponente variable.
Así, podemos extraer las siguientes conclusiones:

1) El modelo es general y bien construido, en particular para $M = 1$ y $f_1(x, u) \equiv f_1(x)$, coincide con el modelo estudiado por Cojan y Matei, siendo así un modelo nuevo en mecánica del contacto.

2) Los espacios $W^{m,p(x)}(\Omega)$ resultan ser los adecuados para obtener la solución débil del problema planteado, pues se probó que en el subespacio cerrado

$$X = \left\{ u \in W^{1,p(x)}(\Omega) : u|_{\Gamma} \right\}$$

se obtiene el resultado buscado.

3) El utilizar el método de multiplicadores de Lagrange para la formulación abstracta de (I), nos permite usar nuevas técnicas del análisis funcional para garantizar la existencia de la solución para el problema linealizado; facilitandonos el análisis numérico.

4) El teorema del punto fijo de Schauder resuelve definitivamente el problema no lineal; nuestro trabajo ilustra de manera explícita la obtención de cotas cuando hay fuentes no lineales complicadas.

5) Las estrategias planteadas en (3) y (4) permiten demostrar la existencia y unicidad de la solución débil y, manipular técnicas avanzadas del análisis funcional y los espacios de Sobolev con exponentes variables.

6) Precisamos que la metodología utilizada puede ser usada para resolver otros modelos de desigualdades variacionales, hemivariacionales y en diferentes contextos: espacios de Orlicz, espacios de Markusewitz, etc.

Bibliografía

[1] AFROUZI G.A., MIRZAPOUR M., Eigenvalue problems for $p(x)$-Kirchhoff type equations, Electron. J. Differential Equations 2013 (2013) 1& 10, J. Math. 1 (2000), 1&11.

[2] AFROUZI G.A., CHUNG, N. T, NAGHIZADEH Z., Multiple solutions for $p(x)$-Kirchhoff type problems with Robin boundary conditions, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2022 (2022), No. 24, pp. 1&16.

[3] BOUREANU M., MATEI A., Nonlinear problems with $p()$-growth conditions and applications to antiplane contact models, Adv. Nonlinear Stud 14 (2014), 295&313.

[4] CABANILLAS L.E., HUARINGA L. A nonlocal $p(x)\&q(x)$ elliptic transmission problem with dependence on the gradient Int. J. Appl. Math, 34 (1)(2021) 93&108.

[5] H. Brezis.,"Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations". Springer, 2010.

[6] COJOCARU M., MATEI A. Well - posedness for a class of frictional contact models via mixed variational formulations, Nonlinear Anal RWA, 47(2019) 127&141.

[7] CHUNG, N. T., Multiple solutions for a class of $p(x)$-Kirchhoff type problems with Neumann boundary conditions, Adv. Pure Appl. Math., 4 (2) (2013), 165&177.

[8] X. L. FAN, J. S. SHEN, D. ZHAO, Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 262 (2001), 749&760.

[9] X. L. FAN, Q. H. ZHANG,Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems,Nonlinear Anal. 52 (2003), 1843&1852.

[10] X.L. Fan, D. Zhao,On the Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$,J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), 424&446.

[11] Ruzicka, M., Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[12] Sofonea M, and Matei A., Variational inequalities with applications. A study of antiplane frictional contact problems. In: Advances in mechanics and mathematics, vol. 18. New York: Springer, 2009

[13] Cojocaru, M. C., & Matei, A. (2019). Well-posedness for a class of frictional contact models via mixed variational formulations. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 47, 127&141.

[14] Matei, A., Micu, S., & Nita, C. (2018). Optimal control for antiplane frictional contact problems involving nonlinearly elastic materials of Hencky type. Mathematics and Mechanics of Solids, 23(3), 308&328.

[15] Matei, A. (2014). An existence result for a mixed variational problem arising from Contact Mechanics. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 20, 74&81.

[16] Sofonea, M., & Matei, A. (2009). Variational inequalities with applications: a study of antiplane frictional contact problems (Vol. 18). Springer Science & Business Media.

[17] X.L. Fan, D. Zhao.,"On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$ ". J. Math. Anal. Appl. 263 (2001) $424 - 446$.

[18] O. Kovacik, J. Rakosnik.,"On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$". Czechoslovak Math. J. 41 (1991) $592 - 618$.

[19] Matei, A., Sitzmann, S., Willner, K., & Wohlmuth, B. I. (2018). A mixed variational formulation for a class of contact problems in viscoelasticity. Applicable Analysis, 97(8), 1340&1356.

[20] L.C. Evans., "Partial Differential Equations", Second edition, in: Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, 2010.

[21] R.A. Adams., "Sobolev Spaces ". Academic Press, 1975.

[22] Correa, F.J.S.A., Costa, A.C.R., Figueiredo G.M., "On a singular elliptic problem involving the $p(x)-$ Laplacian and generalized Lebesgue$-$Sobolev sapces". Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol. 17, (2007).

[23] Guimaraes, C.J., "Sobre os Espacos de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicacoes Envolvendo o $p(x)$-Laplaciano. "Dissertacao de mestrado, CCT $-$ UFCG, 2006.

[24] J.L. Lions., "On some questions in boundary value problems of mathematical physics ". Instituto de Matematica, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ,(1978)

[25] Medeiros, L.A. & Milla, M.A., "Espacos de Sobolev(Iniciacao aos Problemas Elípticos nao Homogeneos) ". IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[26] Evans, L. C. (2010). Partial differential equations (Vol. 19). American Mathematical Soc.

[27] Botelho, G., Pellegrino, D., & Teixeira, E. (2012). Fundamentos de análise funcional. SBM.

10	docplayer.com.br Fuente de Internet	<1 %
11	Willy David Barahona Martínez, Jesús Virgilio Luque Rivera, José Simeón Quique Broncano, Luis Enrique Quispe Gallegos et al. "Un problema de Dirichlet del tipo p(x)-Kirchhoff vía alternativa de Fredholm", Pesquimat, 2021 Publicación	<1 %
12	coek.info Fuente de Internet	<1 %
13	Submitted to Universidad Nacional del Santa Trabajo del estudiante	<1 %
14	revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
15	repositorio.unifei.edu.br Fuente de Internet	<1 %
16	Submitted to Universidad Nacional de Trujillo Trabajo del estudiante	<1 %
17	www.univie.ac.at Fuente de Internet	<1 %
18	cyberleninka.org Fuente de Internet	<1 %
19	arxiv.org Fuente de Internet	<1 %

20	real-j.mtak.hu Fuente de Internet	<1 %
21	zenodo.org Fuente de Internet	<1 %
22	dspace.univ-medea.dz Fuente de Internet	<1 %
23	www.ijpam.eu Fuente de Internet	<1 %
24	dokumen.pub Fuente de Internet	<1 %
25	ackermath.info Fuente de Internet	<1 %
26	www.spm.uem.br Fuente de Internet	<1 %
27	Hasnae El Hammar, Chakir Allalou, Adil Abbassi, Abderrazak Kassidi. "The topological degree methods for the fractional p(·)-Laplacian problems with discontinuous nonlinearities", Cubo (Temuco), 2022 Publicación	<1 %

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 20 words
Excluir bibliografía	Activo		