ESCUELA DE
POSGRADO

“UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN Y LAS CONDICIONES DE OPTIMALIDAD DE KARUSH KHUN TUCKER”

Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática

Autor:
Msc. JOHNNY MOISES VALVERDE MONTORO

Asesor:
Dr. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIERREZ

NUEVO CHIMBOTE – PERU
2021

UNS
ESCUELA DE POSGRADO

CONSTANCIA DE ASESORAMIENTO DE LA TESIS DOCTORAL

Yo, ...Milton Milciades Cortez Gutiérrez.........., mediante la presente certifico mi asesoramiento de la Tesis Doctoral titulada: . "UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN Y LAS CONDICIONES DE OPTIMALIDAD DE KARUSH KHUN TUCKER "., elaborada por el (la) magister ...Johnny Moisés Valverde Montoro..... para obtener el Grado Académico de Doctor en ....Matemática.................... en la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa.

Nuevo Chimbote, 11 de Febrero del ...2022.

....

Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez

ASESOR

UNS
ESCUELA DE
POSGRADO

CONFORMIDAD DEL JURADO EVALUADOR

"UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN Y LAS CONDICIONES DE OPTIMALIDAD DE KARUSH-KHUN- TUCKER"

……
……
……

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN ……Matemática…

Revisado y Aprobado por el Jurado Evaluador:

…………………………………………………………………
Carlos Alberto Minchón Medina
PRESIDENTE (A)

……………………………………
Teodoro Moore Flores
SECRETARIA (O)

……………………………………
Milton Milciades Cortez Gutiérrez
VOCAL

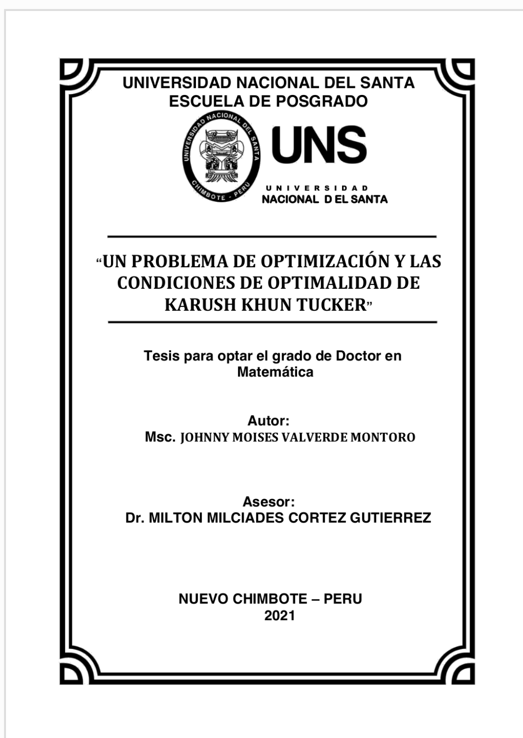
turnitin

Recibo digital

Este recibo confirma quesu trabajo ha sido recibido por Turnitin. A continuación podrá ver la información del recibo con respecto a su entrega.

La primera página de tus entregas se muestra abajo.

Autor de la entrega:	Jhony Valverde
Título del ejercicio:	tesis_doctoral
Título de la entrega:	Tesis_doctoral
Nombre del archivo:	tesis_doctorado_johny_valverde_corregido.pdf
Tamaño del archivo:	694.52K
Total páginas:	57
Total de palabras:	11,617
Total de caracteres:	52,947
Fecha de entrega:	06-mar.-2022 07:19p. m. (UTC-0500)
Identificador de la entre...	1777905040


UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA
ESCUELA DE POSGRADO

UNS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

"UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN Y LAS CONDICIONES DE OPTIMALIDAD DE KARUSH KHUN TUCKER"

Tesis para optar el grado de Doctor en Matemática

Autor:
Msc. JOHNNY MOISES VALVERDE MONTORO

Asesor:
Dr. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIERREZ

NUEVO CHIMBOTE – PERU
2021

DEDICATORIA

Este trabajo está especialmente dedicado a la memoria de mis padres Moisés y Margarita, que están en el cielo, en la Gloria de Dios, por su amor, paciencia, fe, confianza y esfuerzo. Asimismo, con amor a

mi esposa Madeleine, mis hijos Jean Luke y Vanessa Karina.

AGRADECIMIENTOS

Sea propicia la oportunidad para agradecer a mi asesor el Doctor Milton Cortez Gutiérrez, profesor de la Escuela de Posgrado de la UNS, por su paciencia, guía y su invalorable apoyo en la conclusión del presente trabajo.

Indice General

Resumen

Este trabajo muestra las condiciones de Karush Khun Tucker en problemas de optimización multiobjetivo con funciones objetivo de valor intervalo considerando relaciones de orden parcial sobre la familia de todos los intervalos cerrados en R. En el estudio realizado se emplea la aritmética de intervalos y la diferencia generalizada de Hukuhara.

Abstract

This work shows the conditions of Karush Khun Tucker in multiobjective optimization problems with objective functions of interval value considering partial order relationships on the family of all closed intervals in R. In the study carried out the interval arithmetic is used and generalized difference of Hukuhara.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de investigación intitulado “Un problema de Optimización y las condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker” se trata de estudiar la existencia de solución óptima de un problema de optimización para el caso de funciones multivalor de valor intervalo empleando una reformulación de las condiciones de Karush Khun Tucker basado en la derivada generalizada de Hukuhara. En el Capítulo 1, se aborda el problema de investigación, es decir su planteamiento así como su formulación. Luego, en el Capítulo 2, se desarrolla el Marco Teórico del trabajo, para lo cual se fundamenta el aspecto teórico de la investigación junto con su Marco Conceptual.

Asimismo, en el Capítulo 3, se presenta el Marco Metodológico, en la cual se hace uso de las técnicas e instrumentos de la investigación, por lo que se desarrolla secuencialmente las etapas elaborando en forma deductiva las implicancias de la hipótesis considerada.

En el Capítulo 4, se presenta el desarrollo de los resultados y discusión del trabajo de investigación, obtenido en el Capítulo 3.

Finalmente, en el Capítulo 5, se brindan las conclusiones de los resultados principales obtenidos en el capítulo anterior. Además, se brindan algunas sugerencias del trabajo de investigación para futuros estudios posteriores.

Capítulo 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento y fundamentación del problema de investigación

En el mundo real, durante las últimas decadas, las organizaciones tienen que tomar decisiones y para esto, muchas de estas emplean la programación matemática, la cual es una técnica de optimización. En situaciones usuales, los coeficientes de las variables a emplear en un programa matemático son determinísticos y sus valores son fijos o constantes, pero hay muchas situaciones donde estas consideraciones no son válidas a causa de la incertidumbre (no estadístico ni probabilístico) o inexactitud de los datos dentro del contexto de estudio, en consecuencia, los métodos de toma de decisiones bajo incertidumbre son necesarios. Dentro de esta situación problemática, se pretende proponer métodos sencillos, en la toma de decisiones bajo incertidumbre, para resolver un programa matemático considerando los coeficientes empleados como intervalos cerrados y no simplemente números.
Asi se tiene, por ejemplo, el siguiente problema de programación matemática

$$Min \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

sujeto a $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S \subset \mathbb{R}^n$
donde los $C_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ son intervalos cerrados en $\mathbb{R}$.
Ante esta panorama se tiene que trabajar con la Aritmética de Intervalos, este estudio fue presentado y desarrollado por Moore con una actualización (2009). Se Denota como $\mathscr{K}_c(\mathbb{R})^n$ a la clase de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son convexos, compactos y no vacíos. Sean los elementos C y D de $\mathscr{K}_c(\mathbb{R})$. Luego, $C + D$ es definido como $C + D = \{c + d\ ; c \in C \text{ y } d \in D\}$ y $-C$ como $-C = \{-c\ ; c \in C\}$. A partir de lo anterior, se tiene que $C - D = C + (-D)$.

Se denota como $\mathscr{I}$ a la clase de todos los intervalos en $\mathbb{R}$ que son cerrados y acotados. En el presente trabajo, cuando se dice que C es un intervalo cerrado, se debe entender en forma tácita que C también es un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, esto es, C es un elemento de $\mathscr{I}$. Sea $C = [c^I, c^S]$ un intervalo cerrado; los escalares c^I y c^S vienen a ser la cota inferior y superior del intervalo cerrado C, respectivamente. Así, un intervalo cerrado C se puede denotar como $C = [c^I, c^S]$.
Sean $C = [^I, c^S]$ y $D = [d^I, d^S]$ en $\mathscr{I}$. por definición, se tiene:

(i) $C + D = \{c + d\ ; c \in C \text{ y } d \in D\} = [c^I + d^I, c^S + d^S]$;

(ii) $-C = \{-c\ ; c \in C\} = [-c^S, -c^I]$.

Así, se puede observar de que $C - D = C + (-D) = [c^I - d^S, c^S - d^I]$.
Considerando k un número real, también se define

$$kC = \{kc\ ; c \in C\} = \begin{cases} [kc^I, kc^S], & \text{si } k \geq 0, \\ [kc^S, kc^I], & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la norma Euclidiana $\|\cdot\|$ esta definida como $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, para $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, se tiene la *métrica de Hausdorff* entre los conjuntos no nulos $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ definida por

$$d_{\mathrm{H}}(C, D) = \text{máx}\left\{\sup_{c \in C} \inf_{d \in D} \|c - d\|, \sup_{d \in D} \inf_{c \in C} \|c - d\|\right\}.$$

Si $C = [c^I, c^S]$ y $D = [d^I, d^S]$ son dos intervalos cerrados en $\mathbb{R}$, entonces se tiene que

$$d_{\mathrm{H}}(C, D) = \max\big\{|c^I - d^I|, |c^S - d^S|\big\} \tag{1.1}$$

Asimismo, se tienen que estudiar las funciones cuyas imagenes son intervalos cerrados. En el presente trabajo, este tipo de funciones se denominarán funciones de valor intervalo y los elementos del Cálculo usuales son extendidos a este tipo de funciones. La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathscr{I}$ definida sobre un espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ es llamada una función de valor intervalo cuando su imagen es un intervalo cerrado, es decir, $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La función de valor intervalo f se representa como $f(\mathbf{x}) = [f^I(\mathbf{x}), f^S(\mathbf{x})]$, donde f^I y f^S son funciones reales definidas sobre $\mathbb{R}^n$ que satisfacen la condición $f^I(\mathbf{x}) \leq f^S(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Sean f una función valor intervalo definida sobre $\mathbb{R}^n$ y $A = [a^I, a^S]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$. Para $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, se escribe

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) = A$$

si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ de manera que para $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < \delta$, se tiene que $d_{\mathrm{H}}\big(f(\mathbf{x}), A\big) < \varepsilon$. Con estos elementos se desarrollarán las herramientas necesarias para resolver los programas matemáticos relacionados a funciones de valor intervalo anteriormente descritas.

1.2. Antecedentes de la investigación

La imprecisión es algo inevitable en situaciones inesperadas, en consecuencia, considerar la incertidumbre dentro de los problemas de optimización definen una línea de investigación. Los problemas de programación lineal que presentan inexactitud estan muy relacionadas a los problemas de optimización que emplean valores intervalo.

Ishibuchi y Tanaka (1995) estudiaron los problemas de programación multiobjetivo con funciones de valor intervalo y propusieron una relación de orden entre dos intervalos cerrados. Los problemas de optimización matemática con funciones objetivo de valor intervalo son estudiadas por Wu (2007), empleando la diferencia de Hukuhara y la Aritmética de intervalos se define la Derivada de Hukuhara, conocida como H-derivada, y presenta dos relaciones parciales sobre las cuales plantea las condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker (KKT) en un problema de optimización empleando funciones de valor intervalo. En base a este trabajo se extiende este estudio a las funciones multiobjetivo de valor intervalo y los presenta en el articulo de Wu (2009). Asimismo, en el trabajo de Hosseinzade (2011) retoma los estudios de Wu, incidiendo sobre las relaciones de orden parcial planteadas por este investigador.

La diferencia de Hukuhara es extendida a la que se conoce como la diferencia generalizada de Hukuhara y de este modo la H-Derivada da paso a la que se conoce como la Derivada Generalizada de Hukuhara o simplemente gH-derivada presentado por Stefanini(2009). Chalco (2013) presenta nuevas relaciones de orden parcial para replantear las condiciones en los problemas de optimización de funciones de valor intervalo aplicando la gH-derivada, tomando como referencia las relaciones de orden parcial trabajadas por Wu (2007). Se desarrolla una extensión a conjuntos difusos por Stefanini (2018) empleando la diferencia generalizada de Hukuhara.

1.3. Formulación del problema de investigación

Las condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker se tienen que replantear para las funciones de valor intervalo. Para lograr esto se deben de proponer nuevas relaciones de orden parcial entre los miembros de la familia de intervalos cerrados $\mathscr{I}$, las cuales serán extendidas a los vectores intervalo, cuyos componentes serán elementos de $\mathscr{I}$.

La presente investigación se enmarca en un estudio que involucra la diferenciabilidad aplicada a funciones de valor intervalo teniendo que emplear un nuevo tipo de derivada: la derivada H (de Hukuhara). Este tipo de derivada se basa sobre la diferencia de Hukuhara, la cual es muy restrictiva, motivo por el cual se debe extender a la diferencia generalizada de Hukuhara lo que permitirá definir la denominada derivada generalizada de Hukuhara conocida como la gH-Derivada, Stefanini(2009) ()[7]. En los problemas de optimización lo que se busca es minimizar o maximizar una función objetivo y en el presente estudio el problema de investigación lo formulamos por medio de la siguiente pregunta:

¿Existe solución para el siguiente programa matemático

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad \text{mín} \quad & F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \cdots, F_q(\mathbf{x})) \\ \text{sujeto a} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

de modo que satisfaga las condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker donde F es una función multivalor intervalo (sus componentes son funciones de valor intervalo)?

1.4. Delimitación del estudio

El estudio del presente trabajo de Tesis está delimitado básicamente en las condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker extendidos su aplicación a funciones objetivo multivalor cuyas imagenes se encuentran en el conjunto $\mathscr{I}^n$, donde $\mathscr{I}$ es la clase de intervalos cerrados y acotados. Para identificar las soluciones óptimas de Pareto se definirán las relaciones de orden parcial sobre $\mathscr{I}$, las cuales serán extendidas sobre $\mathscr{I}^n$.

1.5. Justificación e importancia de la investigación

El problema planteado está clasificado como un problema de optimizar situaciones que presentan variabilidad de datos conocido como ruido, lo cual no se puede resolver en el sentido tradicional. Esto genera la situación de encontrar nuevas variantes como replantear los elementos de cálculo tradicional y las relaciones de orden usuales. La aritmética y análisis de intervalo fue desarrollada como un esfuerzo por manipular los intervalos que delimitan la incertidumbre que aparecen en muchos modelos determinísticos computacionales y matemáticos que representan algunos fenómenos de la vida real. El estudio de las funciones de valor intervalo permite afrontar la resolución de los programas matemáticos que presentan cierta incertidumbre (no considera aleatoriedad) en sus funciones objetivo.

Para resolver los problemas de optimización, se requiere comparar valores y como lo que se van a comparar son intervalos, esto hace necesario establecer una relación de orden parcial entre los elementos de $\mathscr{I}$. Se aprovecha esta forma de comparar y se extiende a los vectores, cuyos componentes son elementos de $\mathscr{I}$.

La derivada de Hukuhara (H-derivada) permitirá reformular las condiciones de Karush Khun Tucker aplicadas en los programas matemáticos, cuyas funciones objetivo son las funciones de valor intervalo. Estas condiciones se repotencian con el empleo de la derivada generalizada de Hukuhara (gH-derivada), las cuales se aplicarán en las funciones multiobjetivo.

1.6. Objetivos de la investigación

Objetivo general:

Identificar una solución óptima de Pareto del programa matemático (P).

Objetivos específicos:

a) Establecer una relación de Orden en $\mathscr{I}$ y aplicar en la comparación de vectores con componentes definidos en $\mathscr{I}$.

b) Reformular las condiciones de Karush Khun Tucker para funciones objetivo de valor intervalo empleando la gH-derivada.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se muestran los conceptos previos necesarios para el desarrollo del presente trabajo en su conjunto, se da una descripción acerca de las funciones multivalor intervalo, la forma de definir la diferencia generalizada de Hukuharala y su extensión al cálculo por medio de la gh-derivada generalizada de Hukuhara.

2.1. Fundamentos teóricos de la investigación

La variabilidad de los datos o ruido se tratarán por medio de intervalos cerrados y acotados los cuales conformarán el conjunto $\mathscr{I}$. Para la operatividad aritmética de los elementos de $\mathscr{I}$ se ha usado la aritmética de intervalos plasmada en el trabajo de Moore (2009). El tratamiento de la H-derivada y gH-derivada fueron desarrolladas en los trabajos de Wu (2007), Stefanini (2009) y Chalco (2013), sobre estas bases se plantearán la extensión de las condiciones de optimización de Karush Khun Tucker para optimizar las funciones objetivo multivalor intervalo.

2.2. Marco conceptual

2.2.1. El cálculo y las funciones de valor intervalo

Se tiene que extender las técnicas de Cálculo tradicional a las funciones de valor intervalo, como son el límite, la continuidad y la derivada.

Proposición 2.1. *Dada una función F de valor intervalo definida sobre $\mathbb{R}^n$, con $F(\mathbf{x}) = [F^I(\mathbf{x}), F^S(\mathbf{x})]$ y $A = [a^I, a^S] \in \mathscr{I}$. Se tiene que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}} F(\mathbf{x}) = A$ siempre y cuando $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}} F^I(\mathbf{x}) = a^I$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}} F^S(\mathbf{x}) = a^S$.*

Demostración. Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para $\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\| < \delta$, se tiene que $d_{\mathrm{H}}\big(F(\mathbf{x}), A\big) < \varepsilon$.
Por la métrica de Hausdorff, $|F^I(\mathbf{x}) - a^I| < \varepsilon$, y $|F^S(\mathbf{x}) - a^S| < \varepsilon$, con lo que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}} F^I(\mathbf{x}) = a^I$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}} F^S(\mathbf{x}) = a^S$.
Para la parte del retorno, se tiene que para $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe un $\delta_1 > 0$ y un $\delta_2 > 0$ de modo que $\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\| < \delta_1$, entonces $|F^I(\mathbf{x}) - a^I| < \varepsilon$, y $\|\mathbf{x}-\mathbf{c}\| < \delta_2$, entonces $|F^S(\mathbf{x}) - a^S| < \varepsilon$.
Basta tomar $\delta = Min\,\{\delta_1, \delta_2\}$.
Asimismo $d_{\mathrm{H}}(F(\mathbf{x}), A) = Max\,\big\{|F^I(\mathbf{x}) - a^I|, |F^S(\mathbf{x}) - a^S|\big\} < \varepsilon$, con lo cual se tiene que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{c}} F(\mathbf{x}) = A$ □

Proposición 2.2. *Sea F una función de valor intervalo definida sobre $\mathbb{R}^n$, donde $F(\mathbf{x}) = [F^I(\mathbf{x}), F^S(\mathbf{x})]$. Se cumple que F es continua en $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, siempre y cuando, F^I y F^S son continuas en $\mathbf{c}$.*

Demostración. La prueba se hace sencilla siguiendo la argumentación de la proposición anterior. □

Se considerarán dos tipos de diferenciación de funciones de valor intervalo. La primera es empleando el concepto de diferenciabilidad usual, esto es, considerando un abierto $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ y una función de valor intervalo $F : X \to \mathscr{I}$, con $F(x) = [F^I(x), F^S(x)]$, se dice que F es diferenciable siempre que las funciones reales F^I y F^S son diferenciables en x_0 (en el sentido usual).

Para proponer otro tipo de diferenciabilidad, aplicado a las funciones de valor intervalo, se introducirá previamente la denominada Diferencia de Hukuhara. Sean $A = [a^I, a^S]$ y $B = [b^I, b^S]$ dos elementos de $\mathscr{I}$. Si existe un intervalo cerrado $C = [c^I, c^S]$ de modo que $A = B + C$, entonces C es llamada la diferencia de Hukuhara. Desde que $A = B + C$, no es difícil ver que $a^I = b^I + c^I$ y $a^S = b^S + c^S$, esto es, $c^I = a^I - b^I$ y $c^I = a^I - b^I$. Por lo tanto, este intervalo cerrado C existe si $a^I - b^I \leq a^S - b^S$, esto el ancho de B no supere al ancho de A. En este caso, $C = [a^I - b^I, a^S - b^S]$ y escribimos $C = A \ominus B$. En consecuencia, cuando decimos que la diferencia de Hukuhara $C = A \ominus B$ existe, implícitamente significa que $a^I - b^I \leq a^S - b^S$.
El ancho de un intervalo cerrado $A = [a^I, a^S]$ en $\mathbb{R}$, denotado por $w(A)$, es la cantidad $w(A) = a^S - a^I$

Ejemplo 1. *sean $A = [2, 5]$ y $B = [1, 3]$, $C = A \ominus B = [1, 2]$, dode $w(B) = 2 < w(A) = 3$*

Proposición 2.3. *(Wu 2007) Sean $A = [a^I, a^S]$ y $B = [b^I, b^S]$ dos elementos en $\mathscr{I}$.
Si $b^S - b^I \leq a^S - a^I$, entonces la diferencia de Hukuhara $C = A \ominus B$ existe y $C = [c^I, c^S] = [a^I - b^I, a^S - b^S]$.*

Ejemplo 2. *sean $A = [1, 2]$ y $B = [2, 5]$. Como el ancho de A, $w(A) = 1$, es menor que el ancho de B, $w(B) = 3$ entonces no existe $C = A \ominus B$*

De esto se puede notar que no siempre esta definida la diferencia de Hukuhara. A continuación se planteará el segundo tipo de diferenciabilidad a tratar

Definición 2.2.1. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}$. Una función de valor intervalo $f : X \to \mathscr{I}$ es denominada H-*diferenciable *(o* fuertemente diferenciable*) en $x_0 \in \mathbb{R}$ si existe un* *intervalo cerrado $A(x_0) \in \mathscr{I}$ (el cual depende de x_0) de modo que los límites*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} \quad y \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h}$$

*ambos existen y son iguales a $A(x_0)$. En este caso, $A(x_0)$ es llamada la H-*derivada *de f en x_0.*

Ejemplo 3. *Sea $f : \mathbb{R} \to [(x-1)^2 + 1, x^2 + 2]$ una función de valor intervalo definida sobre $\mathbb{R}$. Se puede ver que f es H-diferenciable en cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, con H-derivada $[2x_0 - 2, 2x_0]$.*

Se debe notar que cuando f es H-diferenciable en x_0, de manera implícita se tiene que $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ y $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ existen para todo $h > 0$.
Pero, la Derivada de Hukuhara es muy restrictiva debido a que la Diferencia de Hukuhara no siempre existe, ya que esta limitada por su propia definición. Esto conlleva a tener que replantear la Diferencia de Hukuhara y proponer la denominada Diferencia Generalizada de Hukuhara.

Definición 2.2.2. *(Stefanini y Bede 2009) La Diferencia Generalizada de Hukuhara, denominada gH-diferencia, entre dos intervalos cerrados $C = [c^I, c^S]$ y $D = [d^I, d^S]$, elementos de $\mathscr{I}$, se define*

$$C \ominus_g D = E \Leftrightarrow \begin{cases} C = D + E, & si\ w(C) \geq w(D) \\ D = C + (-1)E, & si\ w(C) < w(D) \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $w(C)$ y $w(D)$ son los anchos de los intervalos cerrados C y D respectivamente.

Esta nueva diferencia tiene propiedades interesantes, se puede observar que para cualquier $C \in \mathscr{I}$ se cumple $C \ominus_g C = \{0\} = [0, 0]$, donde los conjuntos unitarios $\{0\}$ en $\mathbb{R}$ se consideraran como intervalos cerrados degenerados, denotados por $[a, a]$. Asimismo, la gH-diferencia siempre existe entre dos intervalos cerrados cualesquiera en $\mathbb{R}$, esto es, para cualquier par de elementos de $\mathscr{I}$ se obtiene la gH-diferencia.

Proposición 2.4. *(Stefanini y Bede 2009) Sean los intervalos cerrados $C = [c^I, c^S]$ y $D = [d^I, d^S]$, elementos cualesquiera de $\mathscr{I}$, se tiene que*

$$C \ominus_g D = \left[Min\left\{c^I - d^I, c^S - d^S\right\}, Max\left\{c^I - d^I, c^S - d^S\right\}\right] \tag{2.2}$$

Demostración. Ver Stefanini y Bede (2009) $\square$

Ejemplo 4. *sean $A = [-1, 4]$ y $B = [1, 3]$,*
$C = A \ominus_g B = [Min\{-1 - 1, 4 - 3\}, Max\{-1 - 1, 4 - 3\}]$
$= [Min\{-2, 1\}, Max\{-2, 1\}] = [-2, 1]$,
donde $w(B) = 2 < w(A) = 5$

Ejemplo 5. *sean $A = [1, 3]$ y $B = [2, 5]$,*
$C = A \ominus_g B = [Min\{1 - 2, 3 - 5\}, Max\{1 - 2, 3 - 5\}]$
$= [Min\{-1, -2\}, Max\{-1, -2\}] = [-2, -1]$, *donde* $w(A) = 2 < w(B) = 3$

Proposición 2.5. *sean A, B, $C \in \mathscr{I}$ cualesquiera. Se cumple*

(i) $k(A \ominus_g B) = kA \ominus_g kB$, $k \in \mathbb{R}$

(ii) $A \ominus_g B = [0, 0]$ *si y solo si* $A = B$

(iii) $(A + B) \ominus_g (A + C) = B \ominus_g C$

Demostración. (i) y (ii) se obtienen de la definición 2.4.
(iii) sea $D \in \mathscr{I}$ de modo que $(A + B) \ominus_g (A + C) = D$. Por la definición de la gH-diferencia se cumple que $A+B = A+C+D$ o $A+C = A+B+(-1)D$. Esto conlleva a que $B = C + D$ o $C = B + (-1)D$ y por definición de la gH-diferencia se tiene que $B \ominus_g C$ $\square$

Definición 2.2.3. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}$, $t_0 \in X$. La Derivada generalizada de Hukuhara, denominada gH-derivada, de una función de valor intervalo $f : X \to \mathscr{I}$ en t_0, está definida como*

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) \ominus_g f(t_0)}{h}. \tag{2.3}$$

Si existe $f'(t_0) \in \mathscr{I}$ satisfaciendo (2.3), entonces se dice que f es gH-diferenciable en t_0. Se dice que la función de valor intervalo $f : X \to \mathscr{I}$ es $gH-$diferenciable en X si f es gH-diferenciable en cada $t_0 \in X$. El siguiente resultado, presentado por Chalco [3], expresa la $gH-$derivada en términos de los extremos de la imagen (intervalo cerrado) de la función valor intervalo.

Teorema 2.6. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}$, $t_0 \in X$ y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$. Si F^I y F^S son funciones diferenciables en $t_0 \in X$, entonces F es $gH-$diferenciable en t_0 y*

$$F'(t_0) = \left[\min\left\{\left(F^I\right)'(t_0), \left(F^S\right)'(t_0)\right\}, \max\left\{\left(F^I\right)'(t_0), \left(F^S\right)'(t_0)\right\}\right]. \tag{2.4}$$

Demostración. ver Chalco (2013) □

Se debe notar que el recíproco del Teorema 2.6 no es cierto, es decir, la $gH-$diferenciabilidad de F no implica la diferenciabilidad de F^I y F^S (en el sentido usual). Por ejemplo, si se considera la función F de valor intervalo, dada por $F(t) = [-|kt|, |kt|], k \neq 0$, se tiene que F es $gH-$diferenciable en $t_0 = 0$ y $F'(0) = [-k, k]$. Sin embargo F^I y F^S no son funciones diferenciables en $t_0 = 0$.
En general, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.7. *(Chalco 2013) Sea X un abierto en $\mathbb{R}$, $t_0 \in X$ y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$. Se tiene que, F es $gH-$diferenciable en $t_0 \in X$ cuando y sólo cuando uno de los siguientes casos es válido*

(a) F^I y F^S son diferenciables en t_0;

(b) las derivadas laterales $(F^I)'_-(t_0), (F^I)'_+(t_0), (F^S)'_-(t_0)$ y $(F^S)'_+(t_0)$ existen y satisfacen $(F^I)'_-(t_0) = (F^S)'_+(t_0)$ y $(F^I)'_+(t_0) = (F^S)'_-(t_0)$.

Proposición 2.8. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}$, $t_0 \in X$ y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$. Si F es $gH-$diferenciable en t_0, entonces $(F^I + F^S)$ es una función diferenciable en t_0.*

Demostración. Si F es $gH-$diferenciable en t_0 entonces el caso (a) o el caso (b) del Teorema 2.7 es válido. Si el caso (a) es verificado, entonces $F^I + f^S$ es una función diferenciable en t_0. Si el caso (b) es verificado entonces

$$\begin{aligned} \left(F^I + F^S\right)'_+(t_0) &= (F^I)'_+(t_0) + (F^S)'_+(t_0) \\ &= (F^S)'_-(t_0) + (F^I)'_-(t_0) \\ &= (F^I + F^S)'_-(t_0). \end{aligned}$$

En consecuencia $(F^I + F^S)$ es una función diferenciable en t_0. □

Se extenderá el estudio de las funciones valor intervalo sobre $\mathbb{R}^n$, esto es, $F(\mathbf{x}) = F(x_1, \cdots, x_n)$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, para cada $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia, también se tienen las correspondientes funciones reales $F^I(\mathbf{x}) = F^I(x_1, \cdots, x_n)$ y $F^S(\mathbf{x}) = F^S(x_1, \cdots, x_n)$ definidas sobre $\mathbb{R}^n$, de modo que $F(\mathbf{x}) = [F^I(\mathbf{x}), F^S(\mathbf{x})] \in \mathscr{I}$.

Proposición 2.9. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in X$ y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$. Se cumple que F es continua en x_0 si y solo si F^I y F^S son continuas en x_0.*

Definición 2.2.4. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}^n$, $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$, $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ un elemento de X fijo y la función de valor intervalo h_i definida por $h_i(x_i) = F(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ Si h_i es $gH-$diferenciable en $x_i^{(0)}$, entonces se dice que F tiene la i-ésima $gH-$derivada parcial en x_0 (denotado por $(\dfrac{\partial F}{\partial x_i})_g(x_0)$, donde $(\dfrac{\partial F}{\partial x_i})_g(x_0) = (h_i)'(x_i^{(0)})$.*

Recordando del Cálculo la siguiente afirmación:

Proposición 2.10. *Sea f una función real definida sobre $\mathbb{R}^n$. Si asumimos que una de las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ existe en $\mathbf{x}_0$ y que las $n-1$ derivadas parciales restantes existen en alguna vecindad de $\mathbf{x}_0$ y son continuas en $\mathbf{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.*

Se plantea la siguiente definición:

Definición 2.2.5. *Sea F una función de valor intervalo definida en $X \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ un elemento de X fijo. Se dice que F es continuamente $gH-$diferenciable en x_0 si todas las $gH-$derivadas parciales $(\dfrac{\partial F}{\partial x_1})_g(x_0), \ldots, (\dfrac{\partial F}{\partial x_n})_g(x_0)$ existen en alguna vecindad de x_0 y son continuas en x_0 (en el sentido de función valor intervalo).*

Proposición 2.11. *Sea F una función de valor intervalo definida en $X \subset \mathbb{R}^n$, donde $F(x) = [F^I(x), F^S(x)]$, para $x \in X$. Si F es continuamente $gH-$diferenciable en x_0, entonces $(F^I + F^S)$ es continuamente diferenciable en x_0.*

Demostración. Como $F(x) = [F^I(x), F^S(x)]$, $x \in \mathbb{R}^n$. En el caso de que si $(\dfrac{\partial F}{\partial x_i})_g(x_0)$ existe, entonces, de la Proposición 2.8, la derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(F^I + F^S)(x_0)$ existe. Por otro lado, de la Proposición 2.8 y 2.9, como $(\dfrac{\partial F}{\partial x_i})_g(x_0)$ es continua, entonces$\dfrac{\partial}{\partial x_i}(F^I + F^S)$ es continua en x_0. En consecuencia, si F es continuamente $gH-$diferenciable en x_0, entonces la función de valor real $(F^I + F^S)$ es continuamente diferenciable en x_0. $\square$

A continuación se presenta una definición que ha sido tomada de Chalco (2013), la cual es una reformulación de la presentada por Wu (2007).

Definición 2.2.6. *Se dice que la función de valor intervalo $F : X \to \mathscr{I}$ es (débilmente) continuamente diferenciable en $x_0 \in X$ si las funciones de valor real F^I y F^S son continuamente diferenciables en x_0 , esto es, todas las derivadas parciales de F^I y F^S existen en algunas vecindades de x_0 y son continuas en x_0 (en el sentido usual).*

Definición 2.2.7. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}^n$, $t_0 = \left(t_1^{(0)}, \ldots, t_n^{(0)}\right)$ un elemento de X fijo y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$. El gradiente gH de F en t_0, denotado por $\bigtriangledown_g F(\boldsymbol{t}_0)$, está definido por*

$$\bigtriangledown_g F(\boldsymbol{t}_0) = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_g(\boldsymbol{t}_0), \ldots, \left(\frac{\partial F}{\partial t_n}\right)_g(\boldsymbol{t}_0)\right),$$

donde $(\dfrac{\partial F}{\partial t_j})_g(\boldsymbol{t}_0)$ *es la* j*-ésima* gH*-derivada parcial de* f *en* $\boldsymbol{t}_0$ *(*$j = 1, 2, \ldots, n$*), como fue definido en la Definición 2.2.4. Se puede observar que si las funciones extremas* F^I *y* F^S *son funciones diferenciables, entonces* F *es* gH*-diferenciable y en este caso*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_g(\boldsymbol{x}_0) = \left[min\left\{\frac{\partial F^I}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial F^S}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right\}, max\left\{\frac{\partial F^I}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial F^S}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right\}\right],$$

es un intervalo cerrado, con $j = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo 6. *Considere la función* F *de valor intervalo definida por*

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \left[x_1 + {x_2}^2, {x_1}^2 + {x_2}^2 + 3\right].$$

Entonces tenemos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_g(x_1, x_2) = [min\{1{,}2x_1\}, max\{1, 2x_1\}]$$

y

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_g(x_1, x_2) = [min\{2x_2, 2x_2\}, max\{2x_2, 2x_2\}] = [2x_2, 2x_2].$$

Así, el gradiente gH de F *está dada por*

$$\bigtriangledown_g F(x_1, x_2) = ([min\{1, 2x_1\}, max\{1, 2x_1\}], [2x_2, 2x_2]).$$

Ahora, se considerarán las funciones multivalor intervalo F, las cuales están definidas sobre el abierto $X \subset \mathbb{R}^n$, con $F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_q(t))$, $t \in X$, donde cada una de las $F_i : X \to \mathscr{I}$ son funciones de valor intervalo, para $i = 1, 2, \ldots, q$, esto es, $F_i(t) = [F_i^I(t), F_i^S(t)]$, $t \in X$, para $i = 1, 2, \ldots, q$.

Ejemplo 7. *sea* F *una función multivalor intervalo definida sobre* $\mathbb{R}^2$ *dada por* $F(x_1, x_2) = ([x_1^2 + 2x_1x_2, x_1 + x_2^2 + 3], [x_1^2 + 3, 3x_1x_2])$

donde: $F_1(x_1, x_2) = [x_1^2 + 2x_1x_2, x_1 + x_2^2 + 3]$

$F_2(x_1, x_2) = [x_1^2 + 3, 3x_1x_2]$

F_1 *y* F_2 *son funciones valor intervalo en* $\mathbb{R}^2$

Definición 2.2.8. *Sea F una función multivalor definida sobre el abierto $X \subset \mathbb{R}^n$, con $F(t) = (F_1(t),\ F_2(t), \ldots, F_q(t))$, $t \in X$. Se dice que F es*

a) (debilmente) continuamente diferenciable en $x_0 \in X$ si F_i es (debilmente) continuamente diferenciable en x_0, para cada $i = 1, 2, \ldots, q$

b) continuamente gH-diferenciable en $x_0 \in X$ si F_i es continuamente gH-diferenciable en x_0, para cada $i = 1, 2, \ldots, q$

Proposición 2.12. *Sea F una función multivalor intervalo definida sobre el abierto $X \subset \mathbb{R}^n$, con $F(t) = (F_1(t),\ F_2(t), \ldots, F_q(t))$, $t \in X$, donde $F_i(t) = [F_i^I(t), F_i^S(t)]$, $t \in X$, para $i = 1, 2, \ldots, q$. Se cumple que*

a) si F_i^I, F_i^S son diferenciables en x_0, para cada $i = 1, 2, \ldots, q$, entonces F es (debilmente) continuamente diferenciable en $x_0 \in X$.

b) si F es continuamente gH-diferenciable en $x_0 \in X$, entonces $(F_i^I + F_i^S)$ es continuamente diferenciable en x_0, para cada $i = 1, 2, \ldots, q$.

Demostración. (i) se obtiene de las definiciones 2.2.6 y 2.2.8
(ii) es consecuencia de la definición 2.2.8 y de la proposición 2.11. □

2.2.2. Optimización de funciones de valor intervalo

Se tiene los siguientes programas matemáticos:

$$\textbf{(IP1)} \quad \min \quad f(x) = [f^I(x), f^S(x)]$$
$$\text{sujeto a} \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n.$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{(IP2)} \quad \text{mín} \quad & f(x) = [f^I(x), f^S(x)] \\
\text{sujeto a} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Se puede observar que en ambos problemas, las funciones objetivo son funciones de valor intervalo. Además, el programa matemático (IP2) se puede expresar como el problema (IP1) considerando el conjunto admisible
$X = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^n$,
donde g_i, $i = 1, \ldots, m$ son funciones de valor real definidas en $\mathbb{R}^n$. Para poder resolver estos programas matemáticos previamente se tiene que proponer una relación de orden en $\mathscr{I}$. A continuacion se proponen tres tipos de relaciones de orden en $\mathscr{I}$

Definición 2.2.9. *(Wu 2007) Sean $C = [c^I, c^S]$, $D = [d^I, d^S]$, elementos de $\mathscr{I}$. Se tiene que*

$$C \preceq_{\mathrm{IS}} D \text{ sempre y cuando, } c^I \leq d^I \text{ y } c^S \leq d^S. \tag{2.5}$$

Ejemplo 8. *sean $C = [3, 5]$ y $D = [4, 5]$, se observa que $C \preceq_{\mathrm{IS}} D$*

Se puede observar que "$\preceq_{\mathrm{IS}}$"es relación de orden parcial sobre $\mathscr{I}$, porque es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
Además, se escribe $C \prec_{\mathrm{IS}} D$, siempre y cuando, $C \preceq_{\mathrm{IS}} D$ y $C \neq D$. Equivalentemente, $C \prec_{\mathrm{IS}} D$, cuando y solo cuando,

$$\begin{cases} c^I < d^I \\ c^S \leq d^S \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} c^I \leq d^I \\ c^S < d^S \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} c^I < d^I \\ c^S < d^S \end{cases}. \tag{2.6}$$

Definición 2.2.10. *(Wu 2007) Sea $\mathbf{x}^*$ una solución factible, esto es, $\mathbf{x}^* \in X$. Se dice que $\mathbf{x}^*$ es una* solución de tipo I *del problema (IP1) si no existe $\bar{\mathbf{x}} \in X$ de modo que $f(\bar{\mathbf{x}}) \prec_{\mathrm{IS}} f(\mathbf{x}^*)$.*

A continuación se presentará la segunda relacion de orden parcial (presentada por Ishibuchi y Tanaka (1990). Sea $A = [a^I, a^S] \in \mathscr{I}$. Se puede calcular su centro

$a^C = \frac{1}{2}(a^I + a^S)$ y su semilongitud $a^R = \frac{w(A)}{2} = \frac{1}{2}(a^S - a^I)$ de A. En esta situación se puede emplear la notación $\langle a^C, a^R \rangle$ para denotar el intervalo cerrado A como $A = \langle a^C, a^R \rangle$, esto es, $A = [a^I, a^S] = \langle a^C, a^R \rangle$.

Definición 2.2.11. *Sean* $A = [a^I, a^S] = \langle a^C, a^R \rangle$, $B = [b^I, b^S] = \langle b^C, b^R \rangle \in \mathscr{I}$. *Se tiene*

$$A \preceq_{\text{CR}} B \textit{ siempre y cuando, } a^C \leq b^C \textit{ y } a^R \leq b^R. \tag{2.7}$$

También, se escribe $A \prec_{\text{CR}} B$ cuando y solo cuando $A \preceq_{\text{CR}} B$ y $A \neq B$. Además, se escribe equivalentemente, $A \prec_{\text{CR}} B$ siempre y cuando,

$$\begin{cases} a^C < b^C \\ a^R \leq b^R \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a^C \leq b^C \\ a^R < b^R \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a^C < b^C \\ a^R < b^R \end{cases}. \tag{2.8}$$

Definición 2.2.12. *Sea* $\mathbf{x}^*$ *una solución factible, es decir,* $\mathbf{x}^* \in X$. *Decimos que* $\mathbf{x}^*$ *es una* solución de tipo II *del problema (IP1) si no existe* $\bar{\mathbf{x}} \in X$ *de modo que* $f(\bar{\mathbf{x}}) \prec_{\text{IS}} f(\mathbf{x}^*)$ *o* $f(\bar{\mathbf{x}}) \prec_{\text{CR}} f(\mathbf{x}^*)$.

Observación 2.2.1. Sea $\mathbf{x}^*$ una solución factible, es decir, $\mathbf{x}^* \in X$. Se puede observar, por la propia definición 2.2.12, de que si $\mathbf{x}^*$ es una solución de tipo I del problema (IP1), entonces $\mathbf{x}^*$ es también una solución de tipo II del problema (IP1).

Finalmente se tiene la tercera relación de orden presentada por Chalco (2013). Sea $A = [a^I, a^S] \in \mathscr{I}$ su longitud o ancho es $w(A)$ y se denotará por a^W, asi $a^W = w(A) = a^S - a^I$

Definición 2.2.13. *Sean* $A = [a^I, a^S]$, $B = [b^I, b^S] \in \mathscr{I}$. *Se tiene que*

$$A \preceq_{\text{IW}} B \textit{ siempre y cuando, } a^I \leq b^I \textit{ y } a^W \leq b^W. \tag{2.9}$$

Se puede observar que "$\preceq_{\text{IW}}$"es una relación de orden parcial sobre $\mathscr{I}$, porque es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Además, se escribe $A \prec_{\text{IW}} B$ siempre y cuando, $A \preceq_{\text{IW}} B$ y $A \neq B$. Equivalentemente, $A \prec_{\text{IW}} B$ si, y solo si,

$$\begin{cases} a^I < b^I \\ a^W \leq b^W \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a^I \leq b^I \\ a^W < b^W \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} a^I < b^I \\ a^W < b^W \end{cases}. \tag{2.10}$$

Definición 2.2.14. *(Chalco 2013) Sea* $\mathbf{x}^*$ *una solución factible, esto es,* $\mathbf{x}^* \in X$. *Decimos que* $\mathbf{x}^*$ *es una* solución de tipo III *del problema (IP1) si no existe* $\bar{\mathbf{x}} \in X$ *tal que* $f(\bar{\mathbf{x}}) \prec_{\text{IW}} f(\mathbf{x}^*)$.

Proposición 2.13. *Sean* $A, B \in \mathscr{I}$ *cualesquiera. Si* $A \preceq_{IW} B$*, entonces* $A \preceq_{IS} B$.

Demostración. Ya que A y B son intervalos cerrados, de modo que $A \preceq_{IW} B$, se tiene

$$a^I \leq b^I \quad \text{y} \quad a^S - a^I = w(A) \leq w(B) = b^S - b^I.$$

Así,

$$a^S - a^I + b^I \leq b^S$$

entonces

$$a^S \leq a^S + (b^I - a^I) \leq b^S.$$

Por lo tanto, $A \preceq_{IS} B$. □

Se debe notar que el recíproco de la Proposición (2.13) no es válida. Por ejemplo, si consideramos $A = [-2, 0]$ y $B = [-1, 0]$, entonces $A \preceq_{IS} B$ pero $A \npreceq_{IW} B$.

Teorema 2.14. *Sea* $\mathbf{x}^*$ *una solución factible de (IP1). Si* $\mathbf{x}^*$ *es una solución tipo I del problema (IP1), entonces* $\mathbf{x}^*$ *es una solución del tipo III del problema (IP1).*

Demostración. como $\mathbf{x}^* \in X$. Suponer que $\mathbf{x}^*$ no es una solución tipo III del problema (IP1), entonces existe $\mathbf{x} \in X$ tal que $F(\mathbf{x}) \preceq_{IW} F(\mathbf{x}^*)$ y $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{x}^*)$. de la Proposición (2.13) $F(\mathbf{x}) \preceq_{IS} F(\mathbf{x}^*)$ y $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{x}^*)$, lo cual es una contradicción, generado por lo supuesto. □

A continuación, se redefinirá el concepto de funciones convexas desde la perspectiva de funciones de valor intervalo.

Definición 2.2.15. *(Chalco 2013) Sea el conjunto convexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y la función $f : X \to \mathscr{I}$ de valor intervalo, con $f(\mathbf{x}) = [f^I(\mathbf{x}), f^S(\mathbf{x})]$. Se dice que f es*

(i) IS-convexa *en* $\mathbf{x}^*$ *si*

$$f(\lambda \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}) \preceq_{\text{IS}} \lambda f(\mathbf{x}^*) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}), \tag{2.11}$$

para cada $\lambda \in]0,1[$ *y cada* $\mathbf{x} \in X$

(ii) CR-convexa *en* $\mathbf{x}^*$ *si*

$$f(\lambda \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}) \preceq_{\text{CR}} \lambda f(\mathbf{x}^*) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}), \tag{2.12}$$

para cada $\lambda \in]0,1[$ *y cada* $\mathbf{x} \in X$

(iii) IW-convexa *en* $\mathbf{x}^*$ *si*

$$f(\lambda \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}) \preceq_{\text{IW}} \lambda f(\mathbf{x}^*) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}), \tag{2.13}$$

para cada $\lambda \in]0,1[$ *y cada* $\mathbf{x} \in X$

Proposición 2.15. *Sean X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo, con $f(\mathbf{x}) = [f^I(\mathbf{x}), f^S(\mathbf{x})]$. Se cumple que:*

(i) F es IS-convexa en $\mathbf{x}^*$ siempre y cuando F^I y F^S son convexas en $\mathbf{x}^*$.

(ii) F es CR-convexa en $\mathbf{x}^*$ siempre y cuando F^C y F^R son convexas en $\mathbf{x}^*$.

(iii) F es IW-convexa en $\mathbf{x}^*$ siempre y cuando F^I y F^W son convexas en $\mathbf{x}^*$.

(iv) Si F es IW-convexa en $\mathbf{x}^*$, entonces F es también IS-convexa en $\mathbf{x}^*$.

Demostración. Los incisos (i), (ii) y (iii) son consecuencia de la definición, y (iv) se obtiene como consecuencia de la proposición 2.13. □

Ahora, se extenderá estas relaciones de orden a los vectores cuyos componentes son valor intervalo.

Definición 2.2.16. *Sea* $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ *es denominado vector de valor intervalo si* $C_j \in \mathscr{I}$*, para cualquier* $j = 1, 2, \ldots, q$

Definición 2.2.17. *Sean* $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ *y* $D = (D_1, D_2, \ldots, D_q)$ *vectores de valor intervalo se dice que*

(i)

$$C \preceq_{\text{IS}} D \text{ siempre y cuando } C_j \preceq_{\text{IS}} D_j,\ j = 1, 2, \ldots, q.$$

(ii)

$$C \prec_{\text{IS}} D \text{ siempre y cuando, } C_j \preceq_{\text{IS}} D_j, \text{ para } \quad j = 1, 2, \ldots, q; \quad \text{y}$$
$$C_k \prec_{\text{IS}} D_k \quad \text{para al menos un indice k .}$$

Definición 2.2.18. *Sean* $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ *y* $D = (D_1, D_2, \ldots, D_q)$ *vectores de valor intervalo se dice que*

(i)

$$C \preceq_{\text{CR}} D \text{ siempre y cuando } C_j \preceq_{\text{CR}} D_j,\ j = 1, 2, \ldots, q.$$

(ii)

$$C \prec_{\text{CR}} D \text{ siempre y cuando } C_j \preceq_{\text{CR}} D_j, \text{ para } \quad j = 1, 2, \ldots, q; \quad \text{y}$$
$$C_k \prec_{\text{CR}} D_k \quad \text{para al menos un indice k .}$$

Definición 2.2.19. *Sean* $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ *y* $D = (D_1, D_2, \ldots, D_q)$ *vectores de valor intervalo se dice que*

(i)

$$C \preceq_{\text{IW}} D \text{ siempre y cuando } C_j \preceq_{\text{IW}} D_j,\ j = 1, 2, \ldots, q.$$

(ii)

$$C \prec_{\text{IW}} D \text{ siempre y cuando } C_j \preceq_{\text{IW}} D_j, \text{ para } \quad j = 1, 2, \ldots, q; \quad \text{y}$$
$$C_k \prec_{\text{IW}} D_k \quad \text{para al menos un indice k .}$$

Proposición 2.16. *Sean* $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ *y* $D = (D_1, D_2, \ldots, D_q)$ *vectores de valor intervalo se dice que*

(i)

$$\text{si } C \preceq_{\text{IW}} D, \text{ entonces } C \preceq_{\text{IS}} D.$$

(ii)

$$\text{si } C \prec_{\text{IW}} D, \text{ entonces } C \prec_{\text{IS}} D.$$

Demostración. (i) Como C y D son vectores valor intervalo y $C \preceq_{\text{IW}} D$, entonces $C_j \preceq_{\text{IW}} D_j,\ j = 1, 2, \ldots, q$.
Luego, por la proposición (2.13) se tiene que
$C_j \preceq_{\text{IS}} D_j,\ j = 1, 2, \ldots, q$.
En consecuencia, se cumple que $C \preceq_{\text{IS}} D$

(ii) análogo a lo anterior.

□

Definición 2.2.20. *(Wu 2009) Sea el conjunto convexo* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *y la función* F *multivalor intervalo definida sobre* X*, esto es,* $F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_q(t)),\ t \in X$*, donde cada una de las* $F_i : X \to \mathscr{I}$ *son funciones de valor intervalo, para* $i = 1, 2, \ldots, q$*. Se dice que* F *es*

(I) IS-convexa *en* $\mathbf{x}^*$ *si cada* F_j *es* IS-convexa *en* $\mathbf{x}^*$*,* $j = 1, 2, \ldots, q$*.*

(II) CR-convexa *en* $\mathbf{x}^*$ *si cada* F_j *es* CR-convexa *en* $\mathbf{x}^*$*,* $j = 1, 2, \ldots, q$*.*

(III) IW-convexa *en* $\mathbf{x}^*$ *si cada* F_j *es* IW-convexa *en* $\mathbf{x}^*$*,* $j = 1, 2, \ldots, q$*.*

Proposición 2.17. *Sea el conjunto convexo* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *y la función* F *multivalor intervalo definida sobre* X*, esto es,* $F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_q(t)),\ t \in X$*, donde cada una de las* $F_j : X \to \mathscr{I}$ *son funciones de valor intervalo, para* $j = 1, 2, \ldots, q$*. Se cumple que:*

(I) *F es IS-convexa en $\mathbf{x}^*$ siempre y cuando F_j^I y F_j^S son convexas en $\mathbf{x}^*$, $j = 1, 2, \ldots, q$..*

(ii) *F es CR-convexa en* $\mathbf{x}^*$ *siempre y cuando* F_j^C *y* F_j^R *son convexas en* $\mathbf{x}^*$*,* $j = 1, 2, \ldots, q$*..*

(iii) *F es IW-convexa en* $\mathbf{x}^*$ *siempre y cuando* F_j^I *y* F_j^W *son convexas en* $\mathbf{x}^*$*,* $j = 1, 2, \ldots, q$*.*

(iv) *Si* F *es IW-convexa en* $\mathbf{x}^*$*, entonces* F *es también IS-convexa en* $\mathbf{x}^*$*.*

Capítulo 3

MARCO METODOLÓGICO

En el presente capítulo se formula la hipótesis central del problema de investigación la cual deberá ser contrastada con los resultados obtenidos, se definen las variables dependiente e independiente de la investigación y los indicadores de la misma.

3.1. Hipótesis central de la investigación

Si x^* es un punto admisible de (P) que satisface las condiciones de Karush Khun Tucker, entonces x^* es un tipo de solución óptima de Pareto del programa matemático (P).

3.2. Variables e indicadores de la investigación

En la presente investigación, las variables identificadas son las siguientes:

Variable Independiente: Minimización de una función multivalor objetivo

Variable Dependiente: Condiciones de Karush Khun Tucker(KKT) para funciones objetivo multivalor intervalo.

Indicadores:

- Implementación de relaciones de orden parcial en $\mathscr{I}^n$
- Identificación de la solución óptima de Pareto del problema de minimización de funciones multivalor intervalo por medio de las condiciones KKT.

3.3. Métodos de la investigación

Se ha empleado el **Método Deductivo**, el cual permitió deducir conclusiones a partir de una serie de afirmaciones o principios. Esto ha permitido presentar ejemplos como particularizaciones de los resultados conseguidos.

Asimismo, el **Método Hipotético - Deductivo**, por medio de la formulación de la hipótesis y empleando procedimientos deductivos se demostró que Si x^* es un punto admisible del programa matemático (P) que satisface las condiciones de Karush Khun Tucker, entonces x^* es un tipo de solución óptima de Pareto de (P).

3.4. Diseño o esquema de la investigación

La investigación parte del conocimiento y estudio teórico del problema y consiste fundamentalmente en proponer una nueva estrategia para poder de ese modo identificar una solución óptima de Pareto por medio de las condiciones KKT. El trabajo se esquematiza en tres partes: **Diseño,** empleando la Aritmética de intervalos y la diferencia generalizada de Hukuhara s extenderán las reglas del Cálculo a las funciones de valor intervalo y multivalor intervalo.
Implementación, se proponen tres tipos de relación de orden en $\mathscr{I}$ asi como redefinir los conceptos de convexidad a las funciones de valor. Finalmente, con todo lo

anterior planteado se reformulan las condiiones KKT para problemas de optimización de funciones de multivalor intervalo.

Pruebas, En esta fase, se elaboran aplicaciones para verificar la validez de las condiciones reformuladas de Karush Khun Tucker en los problemas de minimización de funciones objetivo multivalor intervalo.

3.5. Población y muestra

El trabajo de investigación involucra a la población definida por las funciones multivalor intervalo definidas sobre $\mathbb{R}^n$ cuyas imagenes estan en el conjunto $\mathscr{I}^n$. Mientras que para la muestra se considera una parte representativa de la población que forman parte de los programas matemáticos $MP1$ y $MP2$.

3.6. Actividades del proceso investigativo

En esta sección se enumeran las diferentes actividades realizadas en el proceso de investigación:

- se realizó un trabajo descriptivo y exploratorio de los datos y/o herramientas a emplear. Posteriormente, se recopiló la información proveniente de artículos especializados.
- se demostraron teoremas que permitan extender las condiciones KKT para las funciones multivalor intervalo.
- contrastación de la hipótesis mediante los teoremas enunciados con las condiciones KKT por medio de aplicaciones numéricas correspondientes a problemas de minimización de funciones multivalor intervalo.

3.7. Técnicas e instrumentos de la investigación

Los datos e información a emplear se obtienen tomando como referencia la información proveniente de revistas especializadas sobre el tema en estudio. • Para la variable independiente (Minimización de una función multivalor objetivo) se ha revisado temas afines que lo involucran en base al marco teórico y la operatividad de las mismas . • Para la variable dependiente (Condiciones KKT para funciones objetivo multivalor intervalo) se tomó como referencia otros trabajos de investigación de modo que permiten orientar la reformulación de las condiciones KKT dentro del contexto de estudio planteado.

3.8. Procedimiento para la recolección de datos

Trabajo de campo, las técnicas e instrumentos que se emplearon para obtener y recopilar la información: empleo de la Biblioteca, Internet y consulta a especialistas en el campo de la optimización.
Trabajo de oficina. Realizado para el procesamiento y análisis de los datos obtenidos.
La validación de los datos recopilados en el presente trabajo de investigación se valida por la Universidad Nacional del Santa.

3.9. Técnicas de procesamiento y análisis de los datos

Obtenida una solución factible inicial del programa matemático P, mediante algún método numérico, se procede a aplicarle la verificación de las condiciones de Karush Khun Tucker para deteminar si es una solución óptima de Pareto.

Capítulo 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Programas matemáticos con función multiobjetivo de valor intervalo

Las funciones multivalor intervalo F, las cuales están definidas sobre un abierto $X \subset \mathbb{R}^n$, son aquellas de la forma $F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_q(t))$, $t \in X$, donde cada una de las $F_i : X \to \mathscr{I}$ son funciones de valor intervalo, para $i = 1, 2, \ldots, q$, esto es, $F_i(t) = [F_i^I(t), F_i^S(t)]$, $t \in X$, para $i = 1, 2, \ldots, q$. A continuación se presentan los programas matemáticos, cuyas funciones multiobjetivo son funciones multivalor intervalo

$$\textbf{(MP1)} \quad \text{mín} \quad F(x) = (F_1(x), \ldots, F_q(x))$$
$$\text{sujeto a} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n.$$

donde los $F_i(x) = [F_i^I(x), F_i^S(x)]$, $x \in X$, para $i = 1, 2, \ldots, q$, son funciones de valor intervalo y el conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ será considerado convexo en $\mathbb{R}^n$.

$$\textbf{(MP2)} \quad \text{mín} \quad F(x) = (F_1(x), \ldots, F_q(x))$$
$$\text{sujeto a} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

donde las funciones restricción de valor real $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son convexas en $\mathbb{R}^n$ para $i = 1, \ldots, m$; y las componentes F son funciones de valor intervalo. Además, el programa matemático (MP2) se puede expresar como el problema (MP1) considerando el conjunto admisible
$X = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^n$.

4.2. Condiciones de optimalidad de Pareto

Se presentan los diferentes conceptos de solución óptima de Pareto.

Definición 4.2.1. *Sea $\boldsymbol{x}^*$ una solución factible del problema (MP1), se dice que $\boldsymbol{x}^*$*

(i) es una solución óptima de Pareto tipo-I del problema (MP1) si no existe $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$ de modo que $F(\overline{\boldsymbol{x}}) \prec_{IS} F(\boldsymbol{x}^*)$.

(ii) es una solución óptima de Pareto fuertemente tipo-I del problema (MP1) si no existe $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$ de modo que $F(\overline{\boldsymbol{x}}) \preceq_{IS} F(\boldsymbol{x}^*)$.

(iii) es una solución óptima de Pareto débilmente tipo-I del problema (MP1) si no existe $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$ de modo que $F_k(\overline{\boldsymbol{x}}) \prec_{IS} F_k(\boldsymbol{x}^*)$ para todo $k = 1, \ldots, q$.

Observación 4.2.1. *Sea $X_{wp}^{(I)}$, $X_p^{(I)}$ y $X_{sp}^{(I)}$, denotan el conjunto de todas las soluciones débilmente óptimas de Pareto tipo-I, soluciones óptimas de Pareto tipo-I y soluciones fuertemente óptimas de Pareto tipo-I, respectivamente. Se puede observar que que $X_{sp}^{(I)} \subseteq X_p^{(I)} \subseteq X_{wp}^{(I)}$.*

Definición 4.2.2. *Sea $\boldsymbol{x}^*$ una solución factible del problema (MP1), se dice que $\boldsymbol{x}^*$*

(i) es una solución óptima de Pareto tipo-II del problema (MP1) si no existe $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$ de modo que $F(\overline{\boldsymbol{x}}) \prec_{CR} F(\boldsymbol{x}^*)$.

(ii) es una solución óptima de Pareto fuertemente tipo-II del problema (MP1) si no existe $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$ de modo que $F(\overline{\boldsymbol{x}}) \preceq_{CR} F(\boldsymbol{x}^*)$.

(iii) es una solución óptima de Pareto débilmente tipo-II del problema (MP1) si no existe $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$ de modo que $F_k(\bar{\boldsymbol{x}}) \prec_{CR} F_k(\boldsymbol{x}^*)$ para todo $k = 1, \ldots, q$.

Observación 4.2.2. *Sea $X_{wp}^{(II)}$, $X_p^{(II)}$ y $X_{sp}^{(II)}$, denotan el conjunto de todas las soluciones débilmente óptimas de Pareto tipo-II, soluciones óptimas de Pareto tipo-II y soluciones fuertemente óptimas de Pareto tipo-II, respectivamente. Se puede observar que que $X_{sp}^{(II)} \subseteq X_p^{(II)} \subseteq X_{wp}^{(II)}$.*

Definición 4.2.3. *Sea $\boldsymbol{x}^*$ una solución factible del problema (MP1), se dice que $\boldsymbol{x}^*$*

(i) es una solución óptima de Pareto tipo-III del problema (MP1) si no existe $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$ de modo que $F(\bar{\boldsymbol{x}}) \prec_{IW} F(\boldsymbol{x}^*)$.

(ii) es una solución óptima de Pareto fuertemente tipo-III del problema (MP1) si no existe $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$ de modo que $F(\bar{\boldsymbol{x}}) \preceq_{IW} F(\boldsymbol{x}^*)$.

(iii) es una solución óptima de Pareto débilmente tipo-III del problema (MP1) si no existe $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$ de modo que $F_k(\bar{\boldsymbol{x}}) \prec_{IW} F_k(\boldsymbol{x}^*)$ para todo $k = 1, \ldots, q$.

Observación 4.2.3. *Sea $X_{wp}^{(III)}$, $X_p^{(III)}$ y $X_{sp}^{(III)}$, denotan el conjunto de todas las soluciones débilmente óptimas de Pareto tipo-III, soluciones óptimas de Pareto tipo-III y soluciones fuertemente óptimas de Pareto tipo-III, respectivamente. Se puede observar que que $X_{sp}^{(III)} \subseteq X_p^{(III)} \subseteq X_{wp}^{(III)}$.*

Teorema 4.1. *Sea X un conjunto admisible de (MP1). Se cumple*

(i) $X_{SP}^{(I)} \subset X_{SP}^{(III)}$

(ii) $X_{P}^{(I)} \subset X_{P}^{(III)}$

(iii) $X_{WP}^{(I)} \subset X_{WP}^{(III)}$

Demostración. (i) considerando que $\mathbf{x}^* \in X_{SP}^{(I)}$

Por contradicción, suponer que $\mathbf{x}^* \notin X_{SP}^{(III)}$.

Luego, por definición 4.2.3 existe $\overline{\mathbf{x}} \in X$ de modo que $F(\overline{\mathbf{x}}) \preceq_{IW} F(\mathbf{x}^*)$. Por la proposición (2.16), se tiene que $F(\overline{\mathbf{x}}) \preceq_{IS} F(\mathbf{x}^*)$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $X_{SP}^{(I)} \subset X_{SP}^{(III)}$

(ii) similar a (i)

(iii) considerando que $\mathbf{x}^* \in X_{WP}^{(I)}$. Por contradicción, suponer que $\mathbf{x}^* \notin X_{WP}^{(III)}$. Luego, por definición 4.2.3, existe $\overline{\mathbf{x}} \in X$ de modo que $F_k(\overline{\mathbf{x}}) \prec_{IW} F_k(\mathbf{x}^*)$, para $k = 1, 2, \ldots, q$
de la proposición (2.16), $F_k(\overline{\mathbf{x}}) \prec_{IS} F_k(\mathbf{x}^*)$, para $k = 1, 2, \ldots, q$; lo cual es una contradicción. En consecuencia, $X_{WP}^{(I)} \subset X_{WP}^{(III)}$.

□

4.3. Condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker

Sea el siguiente programa matemático

$$(P) \quad min \qquad f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{sujeto a} \qquad g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

donde f y g_i son funciones reales definidas en $\mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$. Suponga que las funciones restricción g_i son convexas en $\mathbb{R}^n$ para cada $i = 1, \ldots, m$, en consecuencia el conjunto factible $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, i = 1, \ldots, m\}$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. La conocida condición Karush-Kuhn-Tucker (ver Bazaraa [2]), para el problema (P), es declarada de la siguiente manera:

Teorema 4.2. *Dado el problema (P). Asumiendo que las restricciones $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones convexas en $\mathbb{R}^n$ para $i = 1, \dots, m$, $X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, i = 1, \dots, m\}$ es un conjunto admisible, $\boldsymbol{x}^* \in X$, la función objetivo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa, f y g_i son continuamente diferenciable en $\boldsymbol{x}^*$, $i = 1, \dots, m$. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0 \leqslant \mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, de modo que*

(I) $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0;$

(II) $\mu_i g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$ *para todo* $i = 1, \dots, m.$

entonces $\boldsymbol{x}^*$ es una solución óptima de (P)

Definición 4.3.1. *Se dice que las funciones de restricción del problema (MP2) satisfacen las condiciones KKT en $\boldsymbol{x}^*$ si estas son convexas en $\mathbb{R}^n$ y continuamente diferenciables en $\boldsymbol{x}^*$.*

Ahora, las condiciones Karush Khun Tucker (KKT) presentadas en el teorema 4.2 se ampliarán para el caso de las funciones de valor intervalo (Wu[9], Chalco [3]) así como para las funciones multivalor intervalo.

Teorema 4.3. *Dado el programa matemático (MP2), $x^* \in X$. Considerando que F es continuamente gH-diferenciable en x^*; F_j^I, F_j^S son funciones convexas, para $j = 1, \dots, q$. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0 < \lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, q$ y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla (F_j^I + F_j^S)(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0;$

(II) $\mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$ *para todo* $j = 1, \dots, m.$

entonces $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(I)}$ y $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(III)}$ para el programa matemático (MP2).

Demostración. Como F es continuamente gH-diferenciable en $\mathbf{x}^*$, debido a la proposición 2.12 se tiene que $(F_j^I + F_j^S)$ es continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$ para $j = 1, \dots, q$.

Definiendo la función f por $f(x) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla(F_j^I + F_j^S)(x)$

Como F_j^I y F_j^S, para $j = 1, \ldots, q$, son funciones reales convexas, se tiene que f es convexa y continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$.

Así $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla(F_j^I + F_j^S)(\mathbf{x}^*)$ y con las condiciones (i) y (ii), se tendría que:

(I)′ $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$

(II)′ $\mu_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

Aplicando el teorema 4.2 (condiciones KKT a funciones reales), se tiene que $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima de la función real f.

Suponiendo que $\mathbf{x}^* \notin X_P^{(I)}$, esto significa que hay un $x \in X$ y $1 \leq\ k \leq q$ de modo que $F_k(\bar{\mathbf{x}}) \prec_{IS} F_k(\mathbf{x}^*)$, esto implica que $f(x) < f(\mathbf{x}^*)$, lo cual contradice de que f presente un valor óptimo en $\mathbf{x}^*$. En consecuencia, se tiene que $\mathbf{x}^* \in X_P^{(I)}$ y por la proposición 4.1, se tiene que $\mathbf{x}^* \in X_P^{(III)}$ □

Corolario 4.4. *Dado el programa matemático (MP2), $x^* \in X$. Considerando que F es continuamente gH-diferenciable en x^* e IS-convexa en $\boldsymbol{x}^*$. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0 < \lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, q$ y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla(F_j^I + F_j^S)(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0;$

(II) $\mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$ *para todo* $j = 1, \ldots, m$.

entonces $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(I)}$ y $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(III)}$ para el programa matemático (MP2).

Demostración. Como F es IS-convexa en $\mathbf{x}^*$, aplicando la proposición 2.15, se tiene que F_j^I, F_j^S son funciones convexas, para $j = 1, \ldots, q$. Asimismo como F es gH-diferenciable en $\mathbf{x}^*$, aplicando la proposición 2.12 entonces, se tiene que $(F_j^I + F_j^S)$ son continuamente diferenciables en $\mathbf{x}^*$, para $j = 1, \ldots, q$.

Definiendo la función f por $f(x) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla (F_j^I + F_j^S)(x)$

se tiene que f es convexa y continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$ y por el teorema anterior se obtendría el resultado esperado. $\square$

Ejemplo 9. *sea la función F multivalor intervalo dada por $F(x) = (F_1(x), F_2(x)$ donde*

$F_1(x) = [-|(x-1)|, |x-1|]$

$F_2(x) = [-|\frac{(x-1)}{2}|, |\frac{(x-1)}{2}|]$

Se tiene el siguiente programa matemático

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & F(x) = (F_1(x), F_2(x)) \\ \textit{sujeto a} & \begin{array}{rcl} x-2 & \leq & 0 \\ -x & \leq & 0 \end{array} \end{array}$$

F es continuamente gH-diferenciable y las condiciones del teorema 4.3 son satisfechas en $x = 1$

Teorema 4.5. *Dado el programa matemático (MP2). Considerando que F es CR-convexa y (debil) continuamente diferenciable en $\boldsymbol{x}^*$. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0 < \lambda_j^C, \lambda_j^R \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, q$ y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} \lambda_j^C \nabla F_j^C(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^R \nabla F_j^R(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0;$

(II) *$\mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.*

entonces $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(II)}$ para el programa matemático (MP2).

Demostración. Como $F = (F_1, F_2, \ldots, F_q))$ es una función multivalor intervalo, esto es $F_j(x) = (F_j^I, F_j^S)$, (debil) continuamente diferenciable y convexa, entonces los F_j^C y F_j^R son continuamente diferenciables (por definición 2.2.8 y proposición 2.12) y convexas (proposición 2.15) en $\mathbf{x}^*$ para $j = 1, 2, \ldots, q$.

Definiendo la función f por $f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \lambda_j^C F_j^C(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^R F_j^R(\mathbf{x}^*)$

Como F_j^C y F_j^R, para $j = 1, \ldots, q$, son funciones reales continuamente diferenciables y convexas, se tiene que f es convexa y continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$.

Así $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^C \nabla (F_j^C)(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^R \nabla (F_j^R)(\mathbf{x}^*)$ y con las condiciones (i) y (ii), se tendría que:

(I′) $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$

(II′) $\mu_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

Aplicando el teorema 4.2 (condiciones KKT a funciones reales), se tiene que $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima de la función real objetivo f bajo las restricciones de (MP2). Suponiendo que $\mathbf{x}^* \notin X_P^{(II)}$, esto significa que hay un $\overline{\mathbf{x}} \in X$ y $1 \leq k \leq q$ de modo que $F_k(\overline{\mathbf{x}}) \prec_{CR} F_k(\mathbf{x}^*)$, esto implica que $f(\overline{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}^*)$, lo cual contradice de que f presente un valor óptimo en $\mathbf{x}^*$. En consecuencia, se tiene que $\mathbf{x}^* \in X_P^{(II)}$ $\square$

Teorema 4.6. *Dado el programa matemático (MP2). Considerando que F es IW-convexa y (debil) continuamente diferenciable en $\boldsymbol{x}^*$. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0 < \lambda_j^I, \lambda_j^W \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, q$ y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j^I \nabla F_j^I(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^W \nabla F_j^W(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0;$

(II) $\mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$ *para todo* $j = 1, \ldots, m.$

entonces $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(III)}$ para el programa matemático (MP2).

Demostración. Como $F = (F_1, F_2, \ldots, F_q)$ es una función multivalor intervalo, esto es $F_j(x) = (F_j^I, F_j^W)$, (debil) continuamente diferenciable e IW- convexas en $\mathbf{x}^*$ para $j = 1, 2, \ldots, q.$, entonces los F_j^I, F_j^W son continuamente diferenciables (por definición 2.2.8 y proposición 2.12) y convexas (proposición 2.15) en $\mathbf{x}^*$ para $j = 1, 2, \ldots, q$.

Definiendo la función f por $f(x) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^I F_j^I(x) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^W F_j^W(x)$

Como F_j^I, F_j^W (para $j = 1, \ldots, q$), y g_i (para $j = 1, \ldots, m$) , son funciones reales continuamente diferenciables y convexas, se tiene que f es convexa y continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$.

Así $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^I \nabla (F_j^I)(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^W \nabla (F_j^W)(\mathbf{x}^*)$ y con las condiciones (i) y (ii), se tendría que:

(I′) $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$

(II′) $\mu_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

Aplicando el teorema 4.2 (condiciones KKT a funciones reales), se tiene que $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima de la función real objetivo f bajo las restricciones de (MP2). Suponiendo que $\mathbf{x}^* \notin X_P^{(III)}$, esto significa que hay un $\bar{\mathbf{x}} \in X$ y $1 \leq \ k \leq q$ de modo que $F_k(\bar{\mathbf{x}}) \prec_{IW} \ F_k(\mathbf{x}^*)$, esto implica que $f(x) < f(\mathbf{x}^*)$, lo cual contradice de que f presente un valor óptimo en $\mathbf{x}^*$. En consecuencia, se tiene que $\mathbf{x}^* \in X_P^{(III)}$ del programa matemático MP2) $\square$

APLICACIÓN NUMÉRICA

Sea la función F multivalor intervalo dada por

$$F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$$

donde sus componentes son funciones de valor intervalo dadas por

$F_1(x_1, x_2) = [x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 3, x_1^2 + +2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 4]$

$F_2(x_1, x_2) = [2x_1^2 + 4x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 7, 2x_1^2 + 4x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 7]$

Se tiene el siguiente programa matemático (tipo MP2)

$$\begin{aligned}
min \qquad & (F(x_1,x_2) = F_1(x_1,x_2), F_2(x_1,x_2)) \\
\text{sujeto a} \qquad & -x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0 \\
& -3x_1 - x_2 + 4 \leqslant 0, \\
& -x_1 - 1 \leqslant 0, \\
& -x_2 + 1 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos las funciones de valor intervalo, componentes de F

$$F_1^I(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 3$$

$$F_1^W(\mathbf{x}) = 1$$

$$F_2^I(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 7$$

$$F_2^W(\mathbf{x}) = 1$$

y las funciones restricción:

$$g_1(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 + 1, \quad g_2(\mathbf{x}) = -3x_1 - x_2 + 4, \quad g_3(\mathbf{x}) = -x_1 - 1, \quad g_4(\mathbf{x}) = -x_2.$$

Se puede ver que las funciones de valor intervalo asi como las funciones restricción satisfacen las condiciones del Teorema .

Para ver que cumplan las condiciones KKT del teorema se tiene la siguiente expresión:

$$\lambda_1^I \begin{bmatrix} 2x_1+2 \\ 2x_2-2 \end{bmatrix} + \lambda_2^I \begin{bmatrix} 4x_1+4 \\ 4x_2-4 \end{bmatrix} + \lambda_1^W \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2^W \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

esto es, se tiene que resolver las siguientes ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} \lambda_1^I(2x_1+2) + \lambda_2^I(4x_1+4) - \mu_1 - 3\mu_2 - \mu_3 = 0, \\ \lambda_1^I 2x_2 - 2() + \lambda_2^I(4x_2-4) - \mu_1 - \mu_2 - \mu_4 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene

$$(x_1^*, x_2^*) = (4/5, 8/5)$$

$$\lambda_1^I = 1/2; \quad \lambda_2^I = 1/4$$

$$\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = 0 \text{ y } \mu_2 = 6/5$$

Como $\mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = \mu_i g_i(9/5, 3/5) = 0$ para $i = 1, \ldots, 4$. Se concluye que $(x_1^*, x_2^*) = (4/5, 8/5)$ es una solución optima Pareto tipo-II.

Teorema 4.7. *Dado el programa matemático (MP2), $x^* \in X$. Considerando que la función multiobjetivo F tiene alguna componente F_j (función valor intervalo) IS-convexa y continuamente gH diferenciable en x^*, para algún $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\lambda \nabla (F_j^I + F_j^S)(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$;

(II) $\mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$ *para todo* $j = 1, \ldots, m$.

entonces $\boldsymbol{x}^* \in X_{WP}^{(I)}$ para el programa matemático (MP2).

Demostración. Como $F = (F_1, F_2, \ldots, F_q))$ es una función multivalor intervalo, esto es $F_j(x) = [F_j^I(x), F_j^S(x)]$ son funciones de valor intervalo, para $j = 1, 2. \ldots, q$.
Considerando que alguna de la funciones componentes F_j, para algún $j \in \{1, 2. \ldots, q\}$, es IS-convexa y continuamente gH diferenciable en x^*, condiciones del teorema.
Definiendo la función f por $f(x) = \lambda(F_j^I + F_j^S)(x)$
Como F_j es IS-convexa $\mathbf{x}^*$, por la proposición (2.13) se tiene que F_j^I y F_j^S, son funciones reales convexas, se tiene que f es convexa. Asimismo F_j es continuamente gH-diferenciable $\mathbf{x}^*$, por la proposición 2.12, entonces $(F_j^I + F_j^S)$ es continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$.
Así $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \nabla(F_j^I + F_j^S)(\mathbf{x}^*)$ y con las condiciones (i) y (ii), se tendría que:

(I)′ $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$

(II)′ $\mu_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

Aplicando el teorema 4.2 (condiciones KKT a funciones reales), se tiene que $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima de la función real f bajo las restricciones del programa (MP2). Suponiendo que $\mathbf{x}^* \notin X_{WP}^{(I)}$, esto significa que hay un $\overline{\mathbf{x}} \in X$ y $1 \leq\ k \leq q$ de modo que $F_k(\overline{\mathbf{x}}) \prec_{IS}\ F_k(\mathbf{x}^*)$, esto implica que $f(x) < f(\mathbf{x}^*)$, lo cual contradice de que f presente un valor óptimo en $\mathbf{x}^*$ En consecuencia, se tiene que $\mathbf{x}^* \in X_{WP}^{(I)}$ $\square$

Teorema 4.8. *Dado el programa matemático (MP2), $x^* \in X$. Considerando que F es continuamente gH-diferenciable e IS-convexa en x^*. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0 < \lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, q$, y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla_g (F_j(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0;$

(II) $\mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$*, para todo* $j = 1, \ldots, m$.

entonces $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(I)}$ y $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(III)}$ para el programa matemático (MP2).

Demostración. Como F es una función multivalor intervalo, esto es
$F = (F_1, F_2, \ldots, F_q)$ donde sus componentes F_j son funciones valor intervalo ($j = 1, 2, \ldots, q$). Según consideraciones del teorema, F es continuamente gH-diferenciable en $\mathbf{x}^*$, debido a la definición (2.2.8), se tiene que (F_j son continuamente gH-diferenciables en $\mathbf{x}^*$ para $j = 1, \ldots, q$.
y por teorema (2.7), los F_j^I y F_j^S son continuamente diferenciables en $\mathbf{x}^*$. De esto, La condición (i) sería equivalente a

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla(F_j^I)(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0 = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla(F_j^S)(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*)$$

de lo cual, sumando se obtiene

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla(F_j^I)(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla(F_j^S)(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j' \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$$

donde se considera $\mu_j' = 2\mu_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$

A partir de esto se hace una argumentación análoga a la realizada en la demostración del teorema (4.3) y se obtiene el resultado esperado. □

APLICACIÓN NUMÉRICA

Sea la función F multivalor intervalo dada por

$$F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$$

donde sus componentes son funciones de valor intervalo dadas por

$F_1(x_1, x_2) = [x_1^2 + 2x_1 + 1, x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 2]$

$F_2(x_1, x_2) = [x_2^2 - 2x_2 + 1, x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 2]$

Se tiene el siguiente programa matemático (tipo MP2)

$$\begin{aligned} min \quad & (F(x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)) \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0 \\ & -x_1 - 1 \leqslant 0, \end{aligned}$$

Así se tiene

$$F_1^I(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1 + 1$$

$$F_1^S(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 2$$

$$F_2^I(\mathbf{x}) = x_2^2 - 2x_2 + 1$$

$$F_2^S(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 2$$

y las funciones restricción son

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 1, \quad g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 1$$

Se puede ver que las funciones F_j^I, F_j^I son convexas, $j = 1, 2$. La función multivalor intervalo F es gH-diferenciable. Asimismo, las funciones restricción satisfacen las condiciones del Teorema.

Como el punto $\mathbf{x}^* = (-1, 1)$ satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema, en consecuencia $\mathbf{x}^* = (-1, 1) \in X_P^{(I)}$ y $\mathbf{x}^* = (-1, 1) \in X_P^{(III)}$

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1. Conclusiones

1. Se desarrollaron metodologías para determinar soluciones óptimas de Pareto del programa matemático (P). Se identificaron tres tipos de soluciones Pareto según la relación de orden parcial establecida sobre $\mathscr{I}$ (conjunto de todos los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$

2. Se establecieron tres tipos de relaciones de orden parcial sobre $\mathscr{I}$, las cuales fueron las denominadas IS, CR, IW. Estas relaciones permitieron realizar las comparaciones entre los vectores con componentes de valor intervalo (elementos de $\mathscr{I}$)

3. En base a la formulación de la gH-derivada se reformularon las condiciones de Karush Khun Tucker para los programas matemáticos cuyas funciones objetivo son funciones multivalor intervalo (funciones cuyos componentes son funciones de valor intervalo)

5.2. Sugerencias

Para futuros trabajos se sugiere lo siguiente:

1. extender las funciones restricción (las cuales fueron de tipo real de variable vectorial) al caso de que sean tratadas como funciones de valor intervalo.

2. aplicar las funciones de valor intervalo para el caso de optimización que involucre lógica difusa.

Bibliografía

[1] BAO Y., ZAO B., BAI E. (2016) Directional diferentiability of interval-valued functions, Journal of Mathematics and Computer Science 16.

[2] BAZARAA M., SHERALI H., SHETTY C. (2006) Nonlinear programming, Theory and Algorithms, Wiley-Interscience, NY.

[3] CHALCO-CANO Y., LODWICK W., RUFIAN-LIZANA A. (2013) Optimality conditions of type KKT for optimization problem with interval-valued objective function via generalized derivative, Springer Science+Business Media, New York.

[4] HOSSEINZADE E., HASSANPOUR H. (2011) The Karush Kuhn Tucker Optimality conditions in interval-valued multiobjetive programming problems, J. Appl. Math. Informatics Vol. 29.

[5] ISHIBUCHI H., TANAKA H. (1990) Multiobjective programming in optimization of the interval objective function, European Journal of Operational Research 48.

[6] MOORE R., BAKER R., CLOUD M. (2009) Introduction to interval analysis, SIAM.

[7] STEFANINI L., BEDE B. (2009) Generalized Hukuhara Differentiability of Interval-valued Functions and Interval Differential Equations, WP-EMS Working Papers Series in Economics, Mathematics and Statistics, Vol. 3.

[8] STEFANINI L., ARANA M. (2018) Karush-Khun-Tucker conditions for interval and fuzzy optimization in several variables under total and directional generalized differentiability article in press www.elsevier.com.

[9] WU H. (2007) The Karush Khun Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function, European Journal of Operational Research 176, 2007.

[10] WU H. (2009) The Karush Khun Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective function, European Journal of Operational Research 196, 2009.

Tesis_doctoral

por Jhony Valverde

Tesis_doctoral

INFORME DE ORIGINALIDAD

16%	15%	3%	5%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	hdl.handle.net Fuente de Internet	6%
2	repositorio.uns.edu.pe Fuente de Internet	5%
3	Submitted to Universidad de San Buenaventura Trabajo del estudiante	1%
4	coek.info Fuente de Internet	<1%
5	tesis.pucp.edu.pe Fuente de Internet	<1%
6	Submitted to Hanoi National University Trabajo del estudiante	<1%
7	Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. "III.1. Conditions de minimalité du premier ordre", EDP Sciences, 2020 Publicación	<1%
8	qdoc.tips Fuente de Internet	<1%

9	ebin.pub Fuente de Internet	<1 %
10	fejer.dyndns.info Fuente de Internet	<1 %
11	repositorio.urp.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
12	sedici.unlp.edu.ar Fuente de Internet	<1 %
13	epdf.pub Fuente de Internet	<1 %
14	nozdr.ru Fuente de Internet	<1 %
15	www.inderscience.com Fuente de Internet	<1 %
16	Submitted to La Trobe University Trabajo del estudiante	<1 %
17	Weihong Zhang, Haicheng Yang. "A study of the weighting method for a certain type of multicriteria optimization problem", Computers & Structures, 2001 Publicación	<1 %
18	rev-inv-ope.pantheonsorbonne.fr Fuente de Internet	<1 %
19	1library.co Fuente de Internet	<1 %

20	Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. "III.4. Conditions de minimalité du second ordre", EDP Sciences, 2020 Publicación	<1 %
21	Patricia Batista Grau. "Desarrollo de nanoestructuras de ZnO mediante anodizado electroquímico en diferentes condiciones para su aplicación en el área energética", Universitat Politecnica de Valencia, 2021 Publicación	<1 %
22	cursos.itam.mx Fuente de Internet	<1 %
23	repository.eafit.edu.co Fuente de Internet	<1 %
24	es.scribd.com Fuente de Internet	<1 %
25	repository.lasalle.edu.co Fuente de Internet	<1 %
26	Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. "IV.3. Premiers pas dans la théorie de la dualité", EDP Sciences, 2020 Publicación	<1 %
27	Submitted to Universidad Nacional del Santa Trabajo del estudiante	<1 %
28	Y. Chalco-Cano, W. A. Lodwick, A. Rufian-Lizana. "Optimality conditions of type KKT for	<1 %

optimization problem with interval-valued objective function via generalized derivative", Fuzzy Optimization and Decision Making, 2013
Publicación

29	indiantextbook.com Fuente de Internet	<1 %
30	pt.scribd.com Fuente de Internet	<1 %
31	vdocuments.site Fuente de Internet	<1 %
32	Debdas Ghosh, Amit Kumar Debnath, Witold Pedrycz. "A variable and a fixed ordering of intervals and their application in optimization with interval-valued functions", International Journal of Approximate Reasoning, 2020 Publicación	<1 %
33	www.colibri.udelar.edu.uy Fuente de Internet	<1 %
34	Xavier D. Quintana, D. Boix, A. Badosa, S. Brucet, J. Compte, S. Gascón, R. López-Flores, J. Sala, R. Moreno-Amich. "Community structure in mediterranean shallow lentic ecosystems: size-based vs. taxon-based approaches", Limnetica, 2006 Publicación	<1 %

repositorio.uees.edu.ec

35	Fuente de Internet	<1 %
36	repositorio.unap.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
37	repositorio.utb.edu.co Fuente de Internet	<1 %
38	www.clubensayos.com Fuente de Internet	<1 %
39	www.dspace.uce.edu.ec Fuente de Internet	<1 %
40	www.mat.uned.es Fuente de Internet	<1 %
41	www.udep.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
42	Hsien-Chung Wu. "The Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective functions", European Journal of Operational Research, 2009 Publicación	<1 %
43	T. Teichmann. "Joint probabilities of partially coupled events", Reliability Engineering, 1986 Publicación	<1 %
44	eprints.lse.ac.uk Fuente de Internet	<1 %

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 1 words
Excluir bibliografía	Activo		