UNS

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SANTA

ESCUELA DE POSTGRADO

DOCTORADO EN MATEMÁTICA

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL NO LINEAL ESTACIONARIA DEL TIPO HIPERBÓLICO

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA

DOCTORANDO:

MS. FIDEL ALEJANDRO VERA OBESO

ASESOR:

DR. MILTON MILCIADES CORTEZ GUTIÉRREZ

NUEVO CHIMBOTE, PERÚ

2014

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL NO LINEAL ESTACIONARIA DEL TIPO HIPERBÓLICO

AUTOR : MS. FIDEL ALEJANDRO VERA OBESO

ASESOR : DR. MILTON M. CORTEZ GUTIERREZ

Tesis de Doctorado aprobado por los siguientes miembros:

JURADO EVALUADOR

Dr. Edmundo Vergara Moreno
Presidente

Dr. Milton Cortez Gutiérrez
Secretario

Dr. Luis Orlando Moncada Alvitrez
Vocal

FICHA CATALOGRÁFICA

Fidel Alejandro Vera Obeso

TÍTULO: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL NO LINEAL ESTACIONARIA DEL TIPO HIPERBÓLICO.

TESIS DE DOCTORADO. Escuela de Postgrado
Universidad Nacional del Santa

ASESOR: Dr. Milton Milciades Cortez Gutiérrez

1. Existencia y Unicidad.
2. Ecuación Diferencial Parcial no Lineal.

DEDICATORIA

A mis tres amores: mi esposa Lastenia y mis hijos Alain y Josimar que son la razón de mi existencia.

A mis padres Gabriela y Carlos *in memorian* por haberme inculcado una educación en valores.

A Dios por guiarme por el camino del bien.

A mis profesores por haber enriquecido mis conocimientos.

FIDEL

AGRADECIMIENTO

El más sincero reconocimiento y gratitud a todos mis profesores quienes con su trabajo y dedicación sembraron la semilla de la sabiduría y una educación en valores y edificaron a un profesional capaz de asumir en el presente y futuro los retos de la educación y la sociedad.

Agradezco de manera especial a mi asesor Dr. MILTON CORTEZ GUTIERREZ, por su incondicional apoyo, consejos y recomendaciones, que hicieron posible la culminación del presente trabajo.

EL AUTOR

ÍNDICE

RESUMEN

En esta investigación se demostró la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico:

$$
\begin{aligned}
&u'' - \Delta u + |u'|^2 u' = f, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T \\
&u = 0 \quad sobre \quad \sum = \partial\Omega \; x\langle 0,T \rangle \\
&u(x,0) = u_0, \quad u'(x,0) = u_1(x)
\end{aligned}
$$

donde: $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi_0 \in H_0^1$ y $\varphi_1 \in H^1$.

Para demostrar la existencia se usó el método de *Faedo - Galerkin* que consiste en una aproximación con subespacios de dimensión finita en los espacios de *Sobolev* $H_0^1(\Omega)$, donde $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de *Hilbert* separable. Para demostrar la unicidad se utilizó el lema de *Gronwall.*

Palabras clave: Movimiento Vibratorio, Espacios de *Sobolev*, Elementos Finitos.

ABSTRACT

In this research was demonstrated the existence and uniqueness of the solution of the nonlinear stationary partial differential equation of hyperbolic type:

$$
\begin{aligned}
&u'' - \Delta u + |u'|^2 u' = f, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T \\
&u = 0 \quad sobre \quad \sum = \partial\Omega \; x\langle 0,T \rangle \\
&u(x,0) = u_0, \quad u'(x,0) = u_1(x)
\end{aligned}
$$

where: $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi_0 \in H_0^1$ y $\varphi_1 \in H^1$.

To demonstrate the existence was used the *Faedo - Galerkin* method which consists an approximation with finite dimensional subspaces in *Sobolev* spaces $H_0^1(\Omega)$, where $H_0^1(\Omega)$ is a separable Hilbert space. To demonstrate the uniqueness was used the *Gronwall* slogan.

Key words: Vibratory motion, *Sobolev* spaces, finite elements.

I. INTRODUCCIÓN

1.1 Realidad Problemática

Una de las herramientas más importante usada en análisis no lineal es la *teoría de bifurcación*, es decir cuando existen cambios en la estructura del conjunto de soluciones de una *ecuación funcional*.

Uno de los casos particulares en el vasto conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que, en su mayoría, modelan los problemas en ingeniería, lo constituyen las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden:

$$u_{tt} - \left(A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y}\right) + Fu = f(x,y)$$

donde la *no linealidad* de esta ecuación está determinada por el exponente diferente de 1, que tiene la función incógnita o una de sus derivadas, o la multiplicación de la función incógnita con una de sus derivadas.

Se clasifican en: ***Elípticas*** si $B^2 - 4AC > 0$ (Ecuación de *Laplace*), ***parabólicas*** si $B^2 - 4AC = 0$ (Ecuación de difusión) e ***hiperbólicas*** si $B^2 - 4AC < 0$ (Ecuación de la onda).

Esta clasificación sigue siendo válida incluso cuando los coeficientes de la ecuación diferencial parcial: A, B, C, D, E y F son funciones de las variables x e y. En estos casos la ecuación puede cambiar de tipo al pasar de un cuadrante a otro, como por ejemplo la ecuación:

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

es hiperbólica en la región: $x^2 - y^2 > 0$, parabólica a lo largo de las rectas $x^2 - y^2 = 0$, y elíptica en la región: $x^2 - y^2 < 0$.

Este tipo de ecuaciones diferenciales parciales provienen de operadores diferenciales de segundo orden. Esto es:

$$\begin{array}{llcl} L: & C^2(\Omega) & \to & C(\Omega) \\ & u & \to & L(u) = f \end{array}$$

donde:

Ω es un subconjunto abierto convexo no vacío de $\mathbb{R}^2$;

$C^2(\Omega)$ un conjunto de funciones de Ω en $\mathbb{R}$, dos veces diferenciable con continuidad.

En la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales parciales, según (Rainardy, 1999), se plantean tres tipos característicos de condiciones de contorno: de *Dirichlet*, de *Neumann* y de *Robin* o Mixta.

Si Ω el dominio de las variables espaciales donde está definida una ecuación diferencial parcial y si $\partial\Omega$ la frontera de Ω, entonces:

1. La condición de contorno: $u = g$ sobre $\partial\Omega$, siendo g una función conocida, constituye la *condición de Dirichlet.*

2. La condición de contorno: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sobre $\partial\Omega$, siendo $\frac{\partial u}{\partial n}$ la derivada normal exterior a Ω en cada punto de $\partial\Omega$, es decir, $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n}.\nabla u$, se

conoce como *condición de Neumann.*

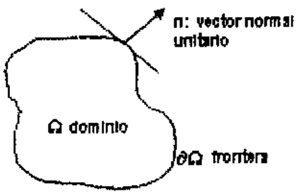

Figura 1. Condiciones de contorno

La frontera $\partial\Omega$ debe ser tal que en todo punto existe ∇u y el vector normal unitario $\vec{n}$.

3. La condición de contorno: $\dfrac{\partial u}{\partial n} + ku = g$, siendo k una constante y g una función conocida, es la *condición de Robin.*

En estos problemas se plantean los siguientes aspectos:

a) ***Existencia** de solución.* Se trata de obtener al menos una solución del problema.

b) ***Unicidad** de la solución.* Se trata de probar que existe una única solución, y de existir otra, la diferencia entre ellos será la solución nula.

c) ***Estabilidad (y/o regularidad)** de la solución.* Se trata de hallar una solución estable, es decir, no cambia bruscamente si hacemos un pequeño cambio en los datos. Para ello se resuelve probando una dependencia continua entre la solución y los datos.

El estudio de estos tres aspectos fundamentales: existencia, unicidad y estabilidad, constituye el corazón de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales.

1.2 ESTADO DEL ARTE DEL TEMA DE LA INVESTIGACIÓN

Los problemas que involucran ecuaciones diferenciales parciales no lineales han venido siendo desarrollados desde varias décadas. Cito algunos ejemplos: Para los *problemas no lineales de la mecánica de fluidos incompresibles* existe un modelo del tipo hiperbólico modelado para fluidos en movimiento tal como se aprecia en (Gómez, 1997 y Ezquerra, 1995), y se han encontrado problemas que relacionan a los *fluidos no newtonianos* según se observa en (Robles, 1995); algunos de estos modelos han sido tratados desde el punto de vista numérico o una matemática finita tal como lo señala (Echevarría, 1995), como por ejemplo los *problemas de control* según se encuentra en (Doubova, 1995). Existen otros modelos que conllevan a las *ecuaciones diferenciales parciales estocásticas* como por ejemplo la ecuación de ITO tratado en (Garrido, 2001). Aparecen en el estudio de *fenómenos estacionarios* (que no cambian con el tiempo) y en *movimientos vibratorios forzados* como por ejemplo en el modelo: $u_{tt} - \nabla^2 u = F(x,t)$ que describe el *movimiento ondulatorio* en una región. Otro campo, tal como lo indica (Zwillinger, 1992), donde aparecen ecuaciones hiperbólicas es en la resolución mediante el método de separación de variables de *problemas de ondas viajantes como la ecuación de Korteweg- de Vries.*

Por supuesto, si el sistema no es infinito la ecuación diferencial debe complementarse con las *condiciones de contorno* correspondientes, y en cualquier caso siempre hay que tener en cuenta las *condiciones de aceptabilidad física de las soluciones* (finitud, periodicidad adecuada en los sistemas de coordenadas que lo requieran, etc.)

1.3 CARACTERIZACIÓN Y NATURALEZA DEL OBJETO DE INVESTIGACIÓN

Las derivadas parciales que aparecen no siempre existen desde el punto de vista clásico; es por eso que también se requiere el uso de la *teoría de las distribuciones* para poder generalizar a una derivada generalizada en la que la solución del modelo a tratar sea en los *espacios funcionales* como son los *espacios de Sobolev*, etc.

La presente investigación se enmarca dentro de un modelo que involucra la *dinámica de fluidos en movimiento vibratorio* basado en un modelo del tipo hiperbólico.

1.4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Existe y es única la solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = f, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T$$
$$u = 0 \quad sobre \quad \sum = \partial\Omega \; x\langle 0, T\rangle$$
$$u(x,0) = u_0, \quad u'(x,0) = u_1(x)$$

?

1.5 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Se considera $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi_0 \in H_0^1$ y $\varphi_1 \in H^1$.

El operador diferencial admite una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$.

1.6 FORMULACIÓN DE LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

GENERAL

Demostrar la existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico.

ESPECÍFICOS

a) Profundizar los conocimientos teóricos referidos a: Espacios de *Sobolev*.
b) Demostrar la existencia de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico.
c) Demostrar la unicidad de solución de la ecuación referida en el rubro (b)

1.7 IMPORTANCIA Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La mayoría de las leyes de la física están gobernadas por ecuaciones diferenciales parciales, como por ejemplo: las ecuaciones de *Maxwell*, la ley de enfriamiento de *Newton*, las leyes de *Kleper*, la ecuación de *Navier – Stokes*, la ecuación del momentum de *Newton*, la ecuación de *Schrödinger* de la mecánica cuántica, la ecuación del telégrafo, la ecuación hiperbólica en la teoría de control, etc.

Las ecuaciones diferenciales parciales, en particular, de segundo orden del tipo hiperbólico aparecen en el estudio de fenómenos estacionarios (que no cambian con el tiempo). Por ejemplo, pueden aparecer al estudiar el comportamiento para tiempos grandes de un sistema en el que está teniendo lugar un proceso de tipo difusivo. Recordemos que en una dimensión la ecuación de la onda es $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$, cuya generalización a dimensiones mayores es: $u_{tt} = \alpha^2 \nabla^2 u$.

En las que también pueden aparecer movimientos vibratorios forzados es en el modelo: $u_{tt} - \nabla^2 u = F(x,t)$ que describe el movimiento ondulatorio en una región. Otro campo ,tal como lo indica (Zwillinger, 1992), donde aparecen ecuaciones hiperbólicas es en la resolución mediante el método de separación de variables de problemas de ondas viajantes como la ecuación de *Korteweg-de Vries*.

Por supuesto, si el sistema no es infinito la ecuación diferencial debe suplementarse con las condiciones de contorno correspondientes, y en cualquier caso siempre hay que tener en cuenta las condiciones de aceptabilidad física de las soluciones (finitud, periodicidad adecuada en los sistemas de coordenadas que lo requieran, etc.)

Por otro lado, las derivadas parciales que aparecen no siempre existen desde el punto de vista clásico, es por eso que también se requiere el uso de la *teoría de las distribuciones* para poder generalizar a una derivada generalizada en la que la solución del modelo a tratar sea en los espacios funcionales como son los espacios de *Sobolev*, etc.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS TEÓRICOS DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se ha realizado bajo el ***enfoque de la Escuela Matemática Francesa***; pues se ha usado la teoría de distribuciones y los espacios de Sobolev. La **teoría de distribuciones**, que tiene su origen en *Dirac, Heaviside y Sobolev*, fue sistematizada por *Schwartz y Gelfand*. Estudiaron las aplicaciones a los problemas en Ecuaciones Diferenciales Parciales. La idea más interesante es la sustitución del concepto de función por el de distribución, que viene a generalizar el de función. La clase de funciones admisibles consideradas por *Levi* es esencialmente lo que hoy se conoce como espacio de *Sobolev* H^1, es decir, funciones integrables tales que su derivada en el sentido de las distribuciones pertenece también a L^2.

En concordancia con (Adams, 1975), algunos métodos de definición de soluciones generalizadas de ecuaciones en derivadas parciales son:

- La sustitución de una ecuación diferencial parcial por otro modelo de sistema físico (*Lagrange, Riemann, Christoffel,...*), en las cuales se consideran, por ejemplo, *soluciones fuertes.*
- La sustitución de varios límites por uno (Derivadas de *Dini*), *solución débil.*
- Diferenciación en casi todo punto (*Lebesgue, Levi,* y sirvió para la introducción de los espacios de *Sobolev*), *soluciones localmente fuertes.*
- Método de las curvas y superficies de prueba. (Se parte del teorema de Stokes, y al integrar la ecuación diferencial ésta se convierte en una ecuación integro-diferencial por lo que se generaliza. Se emplea en la

teoría del potencial), como por ejemplo las *soluciones mediante semigrupos de operadores.*

- Método de las funciones test. (La ecuación diferencial se multiplica por una función y el resultado se integra por partes, con lo que el operador diferencial se transfiere a esta función test. Su origen está en el estudio de ecuaciones hiperbólicas y parabólicas. Es el método básico de la teoría de distribuciones), es decir, *soluciones globales y débiles.*
- Método de las sucesiones. (Se define la solución generalizada como límite de una sucesión de soluciones clásicas: *Euler, Laplace, Sobolev, Schwartz,...*), *soluciones aproximadas mediante Faedo-Galerkin.*

2.2 MARCO CONCEPTUAL

Teoría de Distribuciones

Siguiendo a (Bremermann, 1965; citado en Ortiz, 2004), en diversos ejemplos físicos idealizados aparecen objetos matemáticos (cuasi-funciones) similares a las funciones convencionales cuyo uso daba soluciones consistentes a diversos problemas físicos, pero que no podían ser tratados estrictamente como funciones matemáticas convencionales. Algunos ejemplos de problemas donde aparecían estas "cuasi-funciones":

- Problemas donde aparecía la "derivada" de una función discontinua. Obviamente en ese tipo de problemas las derivadas convencionales no estaban definidas, pero existían sustituciones formales que sugerían que el concepto de función matemática debía ser ampliado para incluir objetos que pudieran comportarse como la derivada convencional, pero que fuera además aplicable a funciones discontinuas.

- *Dirac* introdujo un objeto matemático δ con la siguiente propiedad:

$$f(a) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) f(x) dx$$

Aunque ese objeto matemático compartía ciertas propiedades con las funciones referentes a su integración, se demostró que no existía ninguna función matemática convencional δ que fuera solución de la anterior ecuación.

Los dos problemas anteriores están relacionados y la teoría de distribuciones demostró que pueden definirse un tipo de funciones generalizadas o distribuciones tales que permitan tratar rigurosamente los dos problemas anteriores. El concepto de distribución generaliza al de función, ya que de hecho toda función matemática convencional puede ser considerada también como un caso particular de distribución.

En su definición formal, las distribuciones son una clase de funcionales lineales que trazan un conjunto de funciones de prueba en el conjunto de los números reales.

Definición 1. Una funcional lineal $T : \mathcal{D}(\Omega) \to K$ es una distribución si T es continua. Es decir,

i. T funcional: Para cada función $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, se le asocia un escalar $T(u)$ que designaremos por $\langle T, u \rangle$.

ii. T lineal: $\langle T, \alpha u+\beta v\rangle = \alpha\langle T,u\rangle + \beta\langle T,v\rangle$.

iii. T continua.

Para toda sucesión $\{u_n\}$ convergente en $Ð(\Omega)$ sus imágenes $\{T(u_n)\}$ forman una sucesión convergente en K, obteniendo:

$$\lim_{n\to\infty}(T(u_n)) = T\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) \quad o \quad \lim_{n\to\infty}\langle T,\, u_n\rangle = \left\langle T, \lim_{n\to\infty} u_n\right\rangle.$$

Ejemplo.

Dado $x_o \in \Omega$, se llama *distribución delta de Dirac* centrada en x_o a la aplicación:

$$\begin{aligned} \delta_{x_o} &: Ð(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \varphi &\to \langle \delta_{x_o}, \varphi\rangle = \varphi(x_o) \end{aligned}$$

Asimismo, se define la *suma de distribuciones* y *el producto por un escalar* de la siguiente forma:

$$(T_1+T_2)(u) = T_1(u)+T_2(u) \quad ; \quad (\alpha T)(u) = \alpha T(u) \quad \text{ó}$$

$$\langle T_1 + T_2, u\rangle = \langle T_1, u\rangle + \langle T_2, u\rangle \ \ y \ \ \langle \alpha T, u\rangle = \alpha\langle T, u\rangle$$

En consecuencia, el conjunto de distribuciones tiene estructura de espacio vectorial sobre K y se designa por $Ð'$ (espacio dual de $Ð$).

Derivada Débil

Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. v se llama *derivada débil de* u si satisface:

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx \quad , \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$$

donde: $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n.$

Equivalentemente,

$$\int_\Omega u.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.\varphi dx \quad , \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Ejemplo

Sea $f(x) = |x|$. Consideremos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función de prueba. Es decir,

i. $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

ii. $spp(\varphi) \subset K$, K compacto.

Sea $h(x)$ la derivada de $f(x)$. Integrando por partes la siguiente integral $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx$, se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = 0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

$$u = \varphi(x) \to du = \varphi'(x)dx$$

$$dv = h(x)dx \to v = f(x) \quad , \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx \,, \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$h(x)$ es la derivada débil de $f(x)$.

Calculando $h(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} x\varphi'(x)dx$$

$$u = x \to du = dx\,;$$

$$dv = h(x)dx \to v = \varphi(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx = x\,\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} (-1)\,\varphi(x)dx - x\varphi(x)\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} 1\varphi(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} (-1)\,\varphi(x)dx + \int_{0}^{\infty} 1\varphi(x)dx$$

De donde:

$$h(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x < 0 \\ 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

$h(x)$ es la derivada débil de $f(x)$ y es independiente de φ.

Nota. La derivada clásica depende que f sea diferenciable, mientras que en la derivada débil f debe ser integrable.

Derivada Distribucional

Definición. Sea $T : Đ(\Omega) \to \mathbb{R}$ una distribución, la distribución $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} : Đ(\Omega) \to \mathbb{R}$ se llama *derivada de T respecto a x_i en el sentido de las distribuciones*, si se verifica que:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, u \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle, \quad \forall u \in Đ(\Omega), \text{ y}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial T}{\partial x_i}.udx = -\int_\Omega T.\frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad \forall u \in Đ(\Omega)$$

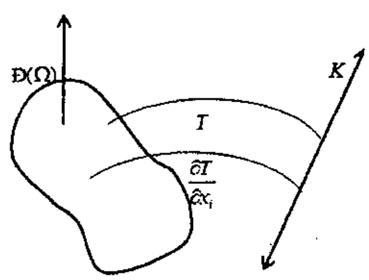

Figura 2. Derivada de una distribución

Proposición. $\quad T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} T_u .$

La distribucional asociada a la derivada de u respecto a x_i coincide con la derivada respecto a x_i de la distribucional asociada a u en el sentido de las distribuciones.

$T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}$: distribucional asociada a la derivada de u respecto a x_i.

$\frac{\partial}{\partial x_i} T_u$: derivada con respecto a x_i de la distribucional asociada a u.

Demostración

$$\left\langle T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} . \varphi dx \underset{\text{int eg. por partes}}{=} - \int_\Omega u . \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\left\langle T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle$$

$$\left\langle T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle, \ \forall \varphi \in Ð(\Omega)$$

$$T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} T_u$$

Propiedades

- Si $u \in C^1(\Omega)$ su derivada clásica coincide con su derivada en el sentido de las distribuciones.
- Una distribución es infinitamente derivable en el sentido de las distribuciones.

Ejemplo 1. La función salto de *Heaviside* $\theta(x)$ tiene por derivada la función delta de *Dirac:* $\theta'(x) = \delta(x)$.

Ejemplo 2. La derivada en el sentido de las distribuciones de una función diferenciable coincide con su derivada ordinaria.

Ejemplo 3. Consideremos la función:

$$u(x) = \begin{cases} 1+x & ; \quad -1 \le x < 0 \\ 1-x & ; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}, \quad u \in L^2(\langle -1,1 \rangle),$$ por tanto es una distribución.

Sea $\varphi \in Ð(\langle -1,1 \rangle)$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle = \int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx$$
$$= -\int_{-1}^{0}(1+x)\varphi'(x)dx - \int_{0}^{1}(1-x)\varphi'(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{0} 1\varphi(x)dx + \int_{0}^{1}(-1)\varphi(x)dx$$

De donde se tiene la derivada distribucional de u.

$$u'(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad -1 < x < 0 \\ -1 & ; \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Gráficamente:

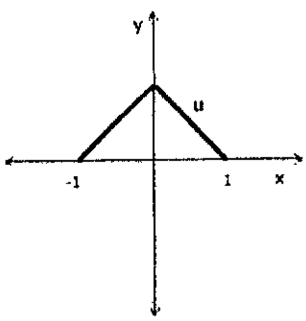

Figura 3. Distribucional.

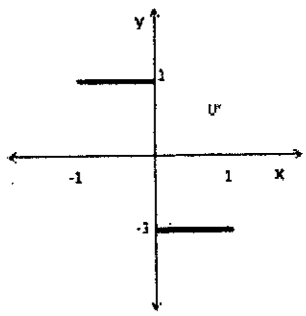

Figura 4. Derivada distribucional

Espacios de *Sobolev*

Los espacios de *Sobolev*, se describen, brevemente, como las clases de funciones que poseen derivadas débiles y ocupan un lugar destacado en el análisis funcional. En las últimas tres décadas se ha producido un gran aporte en la teoría y aplicaciones de estos espacios. Asimismo, dada su importancia en la teoría moderna de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se han transformado en una herramienta imprescindible para el tratamiento de las mismas. Por tal motivo, últimamente se ha producido un creciente interés por el estudio y uso de parte de ingenieros y físicos, para la resolución de sus problemas.

La teoría de estos espacios es iniciada por matemáticos a principio del siglo XX y en particular por *Sobolev* en el año 1930. Si bien son varios los científicos que hicieron sus aportes, como es el caso de Levi, actualmente toda esa teoría se conoce como espacios de *Sobolev*. Estos espacios proporcionan un recurso extraordinario para el planteo y la búsqueda de soluciones de problemas de contorno. Esto es así porque estos espacios son completos y porque permiten obtener resultados generales respecto a la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Otra gran ventaja de los espacios de *Sobolev* radica en que permiten caracterizar el grado de regularidad de funciones y porque muchos de los métodos de aproximación, tales como el *método de Ritz* o el de los *Elementos Finitos*, son adecuada y correctamente formulados cuando se lo hace en el ámbito de estos espacios.

Definición 1. Dado un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, se llama *espacio de Sobolev* y se denota por $H^1(\Omega)$, al conjunto de funciones u de $L^2(\Omega)$, cuyas derivadas parciales de primer orden, también pertenecen a $L^2(\Omega)$, junto a las operaciones de funciones de adición y multiplicación escalar.

Es decir, $H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega);\ i = 1, 2, \ldots, n \right\}$

Nota. Las derivadas parciales en $H^1(\Omega)$, no son derivadas clásicas, sino en el sentido de las distribuciones.

Definición 2. Dado un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, se llama *espacio de Sobolev de orden* $m \in \mathbb{Z}^+$, y se denota por $H^m(\Omega)$, al conjunto de funciones u de $L^2(\Omega)$ cuyas derivadas parciales en el sentido de las distribuciones de orden $\leq m$ también pertenecen a $L^2(\Omega)$. Es decir,

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\},$$

donde:

- $H^1(\Omega)$ es un espacio con producto interno, definido por:

$$\ll u,v \gg = \langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

Demostración

$\forall u,v,w \in H^1(\Omega);\quad \forall \alpha,\beta \in K$.

a) $\ll u,u \gg \geq 0$

$$\ll u,u \gg = \langle u,u\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \;\geq\; 0$$

$\ll u,u \gg = 0$

$$\ll u,u \gg = \langle u,u\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \;=\; 0$$

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \;=\; 0 \qquad \vee \qquad \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx \;=\; 0$$

$u(x) \;=\; 0$, entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \;=\; 0,\ \forall i = 1\ldots n.$

b) $\ll u,v \gg = \ll v,u \gg$

$$\ll u,v \gg = \langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$= \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$

$$= \int_\Omega v(x)u(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx$$

$$= \langle v,u\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$= \ll v,u \gg$$

c) $\ll \alpha u+\beta v,\, w \gg = \alpha \ll u,\, w\gg + \beta \ll v,\, w \gg$

$$\ll \alpha u+\beta v,\, w \gg = \langle \alpha u+\beta v,\, w\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial(\alpha u+\beta v)}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$= \int_\Omega [\alpha u+\beta v](x).w(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial[\alpha u(x)+\beta v(x)]}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx$$

$$= \alpha\int_\Omega u(x).w(x)dx + \beta\int_\Omega v(x).w(x)dx + \alpha\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx +$$

$$\beta\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}dx$$

$$= \alpha\langle u,\, w\rangle_{L^2(\Omega)} + \beta\langle v,\, w\rangle_{L^2(\Omega)} + \alpha\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)} +$$

$$\beta\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$= \alpha \ll u,\, w \gg + \beta \ll v,\, w \gg$$

- $H^1(\Omega)$ es un espacio normado con la norma:

$$\|u\| = [\int_\Omega |u(x)|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx]^{1/2}.$$

Problema Aproximado

El problema hiperbólico consiste en:

Dados: $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi_0 \in H_0^1$ y $\varphi_1 \in H^1$, hallar una función real $u = u(x,t)$ en Q, satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad en \quad Q \\ u(x,0) = u_0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1 \quad en \quad \Omega \\ u = 0 \quad en \quad \Sigma \end{array}\right.$$

Una solución del problema hiperbólico está dada por medio del teorema, enunciado y demostrado posteriormente. Antes haremos algunas consideraciones sobre *distribuciones con valores vectoriales*.

Sea $1 \leq p < \infty$ en un espacio de *Hilbert* real V. Con $L^p(0,T;V)$, $0 < T < \infty$, se representa un espacio vectorial de las funciones vectoriales v: $(0,T) \to V$ que a cada s en $(0,T)$ le hace corresponder un vector $v(s)$ perteneciente a V, tal que $s \to v(s)$ es mensurablemente en $s \to \|v(s)\|_V$ perteneciente a $L^p(0,T)$. Siendo $1 \leq p < +\infty$ se define en $L^p(0,T;V)$ una norma: $\|v\|_{L^p(0,T;V)} = \sup\limits_{0<s<T} ess \|v(s)\|_V$.

En ambos casos, $L^p(0,T;V)$ es un espacio de *Banach*. Cuando $p = 2$, resulta que $L^2(0,T;V)$ es un espacio de *Hilbert*, con el producto escalar $(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(s),v(s))_V ds$.

Si $v \in L^p(0,T;V)$ en $\varphi \in \mathcal{9}(0,T)$, existe una integral en V tal que $\int_0^T (u(s),v(s))ds$ es un vector de V. Dada $v \in L^p(0,T;V)$ ella define una aplicación $\tilde{v}$ lineal de $\mathcal{9}(0,T)$ en V, continua en sentido de convergencia en $\mathcal{9}(0,T)$. Luego, para todo $v \in L^p(0,T;V)$, el espacio $£(\mathcal{9}(0,T);V)$ de las aplicaciones lineales continuas de $\mathcal{9}(0,T)$ en V es vacío. Al espacio $£(\mathcal{9}(0,T);V)$ se da el nombre de espacio de las distribuciones vectoriales sobre $(0,T)$ con valores en el espacio de *Hilbert* V. Los elementos de $£(\mathcal{9}(0,T);V)$ son denominados distribuciones vectoriales. Por tanto, una distribución vectorial sobre $(0,T)$ con valores en V es, por definición, una aplicación cualquiera continua sobre $\mathcal{9}(0,T)$ con valores en V. Dada una distribución $v \in £(\mathcal{9}(0,T);V)$ su valor en φ se representa por $\langle v,\varphi\rangle$. Dada cualquier distribución vectorial v, se define su derivada de orden n por: $\langle \frac{d^n v}{dt^n},\varphi\rangle = (-1)^n \langle v,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\rangle$ para toda $\varphi \in \mathcal{9}(0,T)$. Considerándose una distribución $\tilde{v}$ e identificándola con una función $\tilde{v} \in L^p(0,T;V)$ que la define, se concluye que toda $v \in L^p(0,T;V)$ posee derivadas de todas las órdenes en el sentido de las distribuciones vectoriales sobre $(0,T)$. Este resultado autoriza dar una definición de espacio $W(0,T)$ que vamos a seguir.

Sean $V \subset H$ dos espacios de *Hilbert* reales, siendo una inmersión de V en H continua. Se representa por $W(0,T) = \left\{ v / v \in L^p(0,T;V), \frac{dv}{ds} \in L^p(0,T;H) \right\}$.

Se sigue que $W(0,T)$ es un espacio de *Banach* con la norma:

$$\|v\|_{W(0,T)} = \max\left(\|v\|_{L^p(0,T;V)}, \|v'\|_{L^p(0,T;H)}\right).$$

Lema 1. Si $v \in W(0,T)$ entonces $v \in C^0([0,T];H)$, esto es, las funciones de $W(0,T)$ son continuas en $[0,T]$ con valores en H.

Teorema. Sea $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$; $u_0 \in H_0^1$; $u_1 \in L^2(\Omega)$. Entonces, existe una única función $u : Q \to R$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

(1) $$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$$

(2) $$u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

(3) $$u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

(4) $\frac{d}{dt}(u'(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v)$, $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$ en el sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

(5) $$u(0) = u_0 \quad \text{y} \quad u'(0) = u_1.$$

Demostración

Se usa el método de *Faedo-Galerkin*, que consiste en aproximar el problema del teorema, por problemas análogos, pero en dimensión finita. Construyéndose los subespacios de dimensión finita V_m por medio de funciones propias del operador $-\Delta$ en los espacios de *Sobolev* $H_0^1(\Omega)$. No prueba el teorema, apenas se usa el hecho de que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de *Hilbert* separable para obtener una sucesión con las condiciones de las funciones propias de $-\Delta$.

Observación 1. Suponiéndose el teorema demostrado, resulta del Lema 1 y de

$u \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u' \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ que $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, y de $u'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, que $u' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$, resultando fácil sentido calcular $u(0)$ y $u'(0)$.

Se inicia la demostración observando que siendo $H_0^1(\Omega)$ un espacio de *Hilbert* separable, existe una sucesión de vectores (w_v), $w_v \in H_0^1(\Omega)$, $\forall v$ satisfaciendo las condiciones:

- para cada m los vectores $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son linealmente independientes,
- las combinaciones lineales finitas de los w_v son densas en $H_0^1(\Omega)$.

Problema aproximado. Sea $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ el subespacio de $H_0^1(\Omega)$, de dimensión m, generado por los m primeros vectores. El problema aproximado consiste en determinar $u_m \in V_m$ tal que:

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}(u'(t),v) + a(u(t),v) = (f(t),v), \quad \forall v \in V_m.$$

$$(7) \qquad u_m(0) = u_{0m}, \quad \lim_{m\to\infty} u_{0m} = u_0 \text{ en } H_0^1(\Omega)$$

$$(8) \qquad u'_m(0) = u_{1m}, \quad \lim_{m\to\infty} u_{1m} = u_1 \text{ en } L^2(\Omega).$$

Observación 2. Note que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, luego $u_0 = \lim_{m\to\infty} \sum_{v=1}^{m} a_{vm} w_v$. Haciendo

$u_{0m} = \sum_{v=1}^{m} a_{vm} w_v$, siendo $u_m \in V_m$, se tiene:

(9) $$u_m(t)=\sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t)\,w_\nu\,,$$

de donde se deduce que (7) equivale a $g_{\nu m}(t)=\alpha_{\nu m}$, $\nu=1,2,\dots,m$.

De modo análogo, siendo $H_0^1(\Omega)$ denso en $L^2(\Omega)$, las funciones de $L^2(\Omega)$ también son aproximadas por combinaciones lineales finitas de (w_ν). Luego, tomándose $u_{1m}=\sum_{\nu=1}^{m}\beta_{\nu m}w_\nu$, la condición (8) equivale a $g'_{\nu m}(0)=\beta_{\nu m}$, $\nu=1,2,\dots,m$.

La existencia de la solución aproximada $u_m(t)$, para $t\in[0,t_m)$, resulta del sistema (6), (7) y (8) ser un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, las condiciones del teorema de existencia.

La parte restante de la demostración se divide en:

- obtención de estimativas a priori para las soluciones $u_m(t)$ del sistema (6), (7) y (8) permitiendo aplicar el método de compacidad para prolongar la solución al intervalo $[0,T)$;
- obtención de subsucesiones, a partir de compacidades, cuyo límite es la solución del teorema.

Estimativas a priori haciéndose $v=u'_m(t)\in V_m$ en (6), se obtiene:

(10) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left|u'_m(t)\right|^2+a\left(u_m(t)\right)\right\}=\left(f(t),u'_m(t)\right).$$

Convencionalmente se escribe $a(v)$ para la forma cuadrática $a(v,v)$. La solución aproximada $u_m(t)$ existe $[0,t_m)$. Tomándose $0<t<t_m$ e integrando (10), se obtiene:

(11) $$|u'_m(t)|^2 + a(u_m(t)) = |u'_m(0)|^2 + a(u_m(0)) + 2\int_0^t (f(s), u'_m(s))\,ds.$$

Observación 3. De (7) se concluye que $(a(u_m(0)))$ es convergente, luego limitada. Análogamente, de (8) resulta que $(|u'_m(0)|)$ es convergente, por tanto también limitada.

Observación 4. De la desigualdad de *Schwarz* y de la desigualdad elemental: $2ab \le a^2 + b^2, \quad a,b \ge 0$, se concluye que:

$$2\int_0^t (f(s), u'_m(s))ds \le \int_0^T |f(s)|_\Omega^2 ds + \int_0^t |u'_m(s)|_\Omega^2 ds.$$

Notar que $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, luego, la primera integral del segundo miembro es un número independiente de m.

De las dos observaciones y de (11), resulta:

(12) $$|u'_m(t)|^2 + a(u_m(t)) \le C + \int_0^t |u'_m(0)|^2 ds \quad .$$

Lema 2 (Desigualdad de *Gronwall*). Sea $z(t)$ una función real, absolutamente continua en $[0,a)$ tal que $z(t) \ge 0, \quad \forall t \in [0,a)$ se tiene:

(13) $$z(t) \le C + \int_0^t z(s)ds,$$

Entonces $z(t)$ es limitada.

Retornando a (12) y aplicando la desigualdad de *Gronwall*, se concluye:

- $|u'_m(t)|$ limitada por una constante en $[0,T)$, independiente de m.

- De la desigualdad de *Poincaré-Friedricks*, se concluye que $\|u_m(t)\|$ limitada por una constante en $[0,T)$.

Asimismo, se obtiene:

(14) (u_m) está limitada en $u\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\subset L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$, independiente de m.

(15) (u'_m) está limitada en $u\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\subset L^1(0,T;L^2(\Omega))$, independiente de m.

Resulta que existe una subsucesión (u_ν) de (u_m) con las siguientes propiedades:

(16) $\lim\limits_{\nu\to\infty} u_\nu = u$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, provisto de la topología dual $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

(17) $\lim\limits_{\nu\to\infty} u'_\nu = u'$ en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, provisto de topología dual $L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Equivale a decir que para todo $w\in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))\subset L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$, se tiene:

(18) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\int_0^T ((u_\nu(t),w(t)))dt=\int_0^T((u(t),w(t)))dt$.

Análogamente, identificándose $L^2(\Omega)$ como su dual, se obtiene, para cada $u\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ que:

(19) $\lim\limits_{\nu\to\infty}\int_0^T ((u'_\nu(t),w(t)))dt=\int_0^T((u'(t),w(t)))dt$.

Siendo $a(u,v)$ una forma bilineal continua en $H_0^1(\Omega)$, fijada una coordenada, la forma lineal resultante es continua en $H_0^1(\Omega)$. De allí y de la convergencia de (u_v), mencionada en (16), se obtiene:

(20) $\lim_{v\to\infty}\int_0^T a(u_v(t),w(t))dt = \int_0^T a(u(t),w(t))dt$ para todo $w \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$.

De (16) se concluye que $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ y de (17) que $u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

III. METODOLOGÍA EMPLEADA

3.1 MÉTODOS EMPLEADOS EN LA INVESTIGACIÓN

Método Deductivo. Nos permitió mostrar ejemplos como casos particulares de los resultados obtenidos.

Método Inductivo. A partir de casos presentados en $\mathbb{R} = \Omega$, se generalizaron los resultados en $\mathbb{R}^n = \Omega$.

Método Hipotético – Deductivo. A través de la formulación de la hipótesis y mediante procedimientos deductivos se demostró la existencia y unicidad de la Ecuación Diferencial motivo de la investigación.

3.2 METODOLOGÍA PARA LA PRUEBA DE HIPÓTESIS

Para demostrar la *existencia de solución* de la ecuación diferencial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico se usó una base en el espacio $H_0^1(\Omega)$; mientras que para la *unicidad de solución* se tomó dos soluciones que satisfacen dicha ecuación y se demostró que su diferencia es nula.

3.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS EMPLEADOS

TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
Análisis documental	Fichas: Textuales y de resumen
Entrevista	Guía de entrevista
Encuesta	Cuestionario
Demostración	Teorema

3.4 PROCEDIMIENTO PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS

Trabajo de campo. Las técnicas e instrumentos se utilizaron para obtener información respecto a la demostración de la existencia y unicidad de solución de la ecuación diferencial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico. Se consultó a especialistas en el tema de la investigación.

Trabajo de Oficina. Para el procesamiento y análisis de los datos obtenidos.

IV. DESARROLLO DEL ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

RESULTADOS

Problema

¿Existe y es única la solución de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico de la forma:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = f, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T \\
&u = 0 \quad sobre \quad \sum = \partial\Omega \; x \langle 0, T \rangle \\
&u(x,0) = u_0, \quad u'(x,0) = u_1(x)
\end{aligned}
$$

?

Demostración de la existencia

El siguiente teorema permite demostrar la existencia de la solución de la ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico considerado en el problema.

Teorema

Suponga que: $f, \; f', \; u_0 \; y \; u_1$ son dados en:

$L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right), \;\; L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \;\; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \;\; y \;\; H_0^1(\Omega) \cap L^6(\Omega).$

respectivamente.

Entonces existe una única función u que satisface:

$$
\begin{aligned}
&u'' - \Delta u + |u'|^2 u' = f, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T \\
&u = 0 \quad sobre \quad \sum = \partial\Omega \, x \langle 0, T \rangle \\
&u(x,0) = u_0, \quad u'(x,0) = u_1(x)
\end{aligned}
$$

Demostración

Sean w_j las funciones propias de $-\Delta$ del problema de *Dirichlet*: $-\Delta w_j = \lambda_j w_j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad w_j = 0 \quad sobre \quad \Gamma = \partial\Omega$ tal que $w_j \in H^2(\Omega), \quad w_j \in L^6(\Omega)$Considere $u_{0m}, \quad u_{1m} \in [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ de manera que:

$$
\begin{aligned}
&u_{0m} \to u_0 \quad en \quad H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\
&u_{1m} \to u_1 \quad en \quad H_0^1(\Omega) \cap L^6(\Omega)
\end{aligned}
$$

Definamos el problema aproximado $u_m(t)$ de:

$$
\begin{aligned}
&\left(u_m^{\cdot}(t), w_j\right) + a\left(u_m(t); w_j\right) + \left(\left|u_m^{'}(t)\right|^2 u_m^{'}(t); w_j\right) = \left(f(t), w_j\right) \\
&2 \le j \le m, \quad u_m(t) \in [w_1, w_2, \ldots, w_m], \quad u_m(0) = u_{0m}, \quad u_m^{'}(0) = u_{1m} \\
&donde \quad a(u,v) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx
\end{aligned}
$$

Suponga que $u_m(t) = \sum_{j=1}^{2} g_{jm}(t) w_j$

Multiplicando el problema aproximado por $g_{jm}^{'}(t)$ y sumando en j, resulta:

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|u_m^{'}(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2\right) + \int_\Omega \left|u_m^{'}(t)\right|^4 dx = \left(f(t), u_m^{'}(t)\right)
$$

Integrando de 0 y T:

$$
\frac{1}{2}\left[\left|u_m^{'}(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2\right] + \int_0^t ds \int_\Omega \left|u_m^{'}(t)\right|^4 dx = \int_0^t \left(f(s), u_m^{'}(s)\right) ds + \frac{1}{2}\left[\left|u_{1m}\right|^2 + \left\|u_{0m}\right\|^2\right]
$$

De donde:

$$|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leq C \text{ para } Q = \Omega x[0,T]$$

$$\int_Q |u'_m|^4 dxdt \leq C$$

Reemplazando en el problema aproximado w_j por $-\Delta w_j$ y multiplicando por $g'_{jm}(t)$. Luego sumando en j se deduce:

$$a(u'_m(t), u'_m(t)) + (\Delta u_m(t), \Delta u'_m(t)) + \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u'_m|^2 u'_m\right)\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}dx = a(f(t), u'_m(t))$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}\left[\|u'_m(t)\|^2 + |\Delta u_m(t)|^2\right] + \frac{3}{4}\int_0^t \int_\Omega \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[|u'_m| u'_m\right]\right)^2 dxds =$$

$$\frac{1}{2}\left[\|u_{1m}(t)\|^2 + |\Delta u_{0m}(t)|^2\right] + \int_0^t (f(s), u'_m(s))ds$$

De las convergencias de u_{1m} y u_{0m} se tiene:

$$(\alpha)\begin{cases} u'_m & es\ un\ \lim itado\ de\ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u_m & es\ un\ \lim itado\ de\ L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\ |u'_m| u'_m\right] & es\ un\ \lim itado\ de\ L^2(Q), \quad i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Del problema aproximado se deduce que:

$$|u''_m(0)|^2 = (\Delta u_{0m}, u''(0)) + (f(0), u''_m(0)) - (|u_{1m}|^2 u_{1m}, u''_m(0))$$

de donde:

$$|u''_m(0)| \leq |\Delta u_{0m}| + |f(x)| + \left(\int_\Omega |u_{1m}|^6 dx\right)^{1/2}$$

Luego:

$$(\beta)\quad |u''_m(0)| \leq C$$

Derivando el problema aproximado en t , resulta:

$$\left(u_m'''(t), w_j\right) + a\left(u_m'(t), w_j\right) + 3\left(\left|u_m'(t)\right|^2 \left|u_m''(t), w_j\right.\right) = \left(f'(t); w_j\right)$$

Multiplicando por $g_{jm}''(t)$ y sumando en j, se deduce:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|u_m''(t)\right|^2 + \left\|u_m'(t)\right\|^2\right] + 3\int_\Omega \left|u_m'(t)\right|^2 \left[u_m''(t)\right]^2 dx = \left(f'(t), u_m''(t)\right)$$

Integrando de 0 a T:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left|u_m''(0)\right|^2 + \left\|u_m'(0)\right\|^2\right] + \frac{3}{4}\int_0^t\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\left|u_m'\right| u_m'\right]\right)^2 dx ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left|u_m''(0)\right|^2 + \left\|u_{1m}\right\|^2\right] + \int_0^t \left(f'(s), u_m''(s)\right) ds$$

Usando (β) y (α):

(u_m'') es un limitado de $L^\infty\left(0,T,L^2(\Omega)\right)$

$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left|u_m'\right| u_m'\right]$ es un limitado de $L^2(Q)$

Consecuentemente se puede extraer una subsucesión (u_ν) de (u_m) tal que:

$u_\nu \to u$ débil estrella en $L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$

$u_\nu' \to u'$ débil estrella en $L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$

$u_\nu'' \to u''$ débil estrella en $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

$u_\nu' \to u'$ en $L^2(Q)$m y C.S. en Q

$\left|u_\nu'\right|^2 u_\nu' - \left|u'\right|^2 u'$ débil en $L^{4/3}(Q)$

$\left|u_\nu'\right| u_\nu' - \left|u'\right| u'$ débil en $H^1(Q)$

Luego, tomando el límite en el problema aproximado, cuando $\nu \to \infty$

$$\frac{d}{dt}\left(u'(t),v\right)+a\left(u(t);v\right)+\left(\left|u'\right|^{2}u',v\right)=\left(f(t);v\right)$$

en $D'(0,T)$, $\forall v\in H_0^1(\Omega)$

se toma $\theta\in C^1\left([0,T];\mathbb{R}\right)$, $\theta(0)=1$, $v\in H_0^1(\Omega)$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_0^T\left(u_\nu(t),v\right)\theta'(t)\,dt=\int_0^T\left(u(t),v\right)\theta'(t)\,dt$$

integrando por partes:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{-\int_0^T\left(u_\nu'(t),v\right)\theta(t)\,dt-\left(u_\nu(0),v\right)\right\}=-\int_0^T\left(u'(t),v\right)\theta(t)\,dt-\left(u(0),v\right)$$

luego:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(u_\nu(0),v\right)dt=\left(u(0),v\right)$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(u_{0\nu},v\right)dt=\left(u(0),v\right)$$

$$\left(u_0,v\right)=\left(u(0),v\right)$$

$$u(0)=u_0$$

Por otro lado, multiplicando la ecuación aproximada por θ e integrando por partes, se obtiene:

$$-\left(u_\nu'(0),v\right)-\int_0^T\left(u_\nu'(t),v\right)\theta'(t)\,dt+\int_0^T a\left(u_\nu(t),v\right)\theta(t)\,dt+$$
$$+\int_0^T\left(\left|u_\nu'(t)\right|^{2}u_\nu',v\right)\theta\,dt=\int_0^T\left(f(t),v\right)\theta\,dt$$

Tomando el límite cuando $\nu\to\infty$

$$-\left(u_1,v\right)-\int_0^T\left(u'(t),v\right)\theta'(t)\,dt+\int_0^T a\left(u(t),v\right)\theta\,dt+$$
$$+\int_0^T\left(\left|u'(t)\right|^{2}u',v\right)\theta\,dt=\int_0^T\left(f(t),v\right)\theta\,dt\ldots\ldots(*)$$

Nuevamente integrando por partes, se obtiene:

$$-(u_1,v)-\left[-\int_0^T\left(u'(t),v\right)\dot{\theta}dt+\right]+\left(u'(\bar{T}),v\right)\bar{\theta}(\bar{T})-\left(u'(0),v\right)+$$

$$+\int_0^T a\left(u(t),v\right)\theta(t)\,dt+\int_0^T\left(\left|u'(t)\right|^2 u'(t),v\right)\theta dt=\int_0^T\left(f(t),v\right)\theta dt$$

usando (*) en esta ecuación:

$$-(u_1,v)+\left(u'(0),v\right)=0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

de donde:

$$u'(0)=u_1.$$

Demostración de la unicidad

Sea: $w=u-v$ para u y v soluciones de: $w''-\Delta w+|u'|^2u'-|v'|^2v'=0$.

Tomando el producto escalar con $w'(t)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|w'(t)\|^2+\|w(t)\|^2\right)+\underbrace{\int_\Omega\left(|u'|^2u'-|v'|^2v'\right)(u'-v')\,dx}_{\alpha}=0$$

Por la *propiedad de monotonía*: $\alpha\geq 0$. Lo que implica que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|w'(t)\|^2+\|w(t)\|^2\right)\leq 0.$$

De aquí, según el *lema de Gronwall*, se obtiene: $w=u-v=0$. Lo que se quería demostrar.

DISCUSIÓN

El marco del problema involucra el modelo de la *dinámica de fluidos en movimiento vibratorio* tal como se aprecia en (Gómez, 1997 y Ezquerra, 1995).

Para demostrar la existencia de la solución de la ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico considerada, se usó el *método de Faedo-Galerkin*, que consiste en una aproximación con subespacios de dimensión finita en los espacios de *Sobolev* $H_0^1(\Omega)$, donde $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de *Hilbert* separable. Para demostrar la unicidad se utilizó el lema de *Gronwall*.

La *existencia de solución* de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico se demostró usando los teoremas de inmersión de los espacios de *Sobolev*: Teorema de *Rellich*, Lema de *Gronwall*, de Compacidad y Resultados de Regularidad.

La demostración de la *unicidad* de una ecuación diferencial parcial no lineal del tipo hiperbólico se fundamenta en los espacios de Funciones de Prueba, Distribuciones, los Espacios de *Sobolev* y el teorema de *Gronwall*.

V. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1 CONCLUSIONES

- La *existencia de solución* de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico se demostró usando los teoremas de inmersión de los espacios de *Sobolev*: Teorema de *Rellich*, Lema de *Gronwall*, de Compacidad y Resultados de Regularidad.
- La demostración de la *unicidad* de una ecuación diferencial parcial no lineal del tipo hiperbólico se fundamenta en los espacios de Funciones de Prueba, Distribuciones, los Espacios de *Sobolev* y el teorema de *Gronwall.*
- Tanto la *existencia* como la *unicidad* de la *solución* de una ecuación diferencial parcial no lineal estacionaria del tipo hiperbólico se fundamenta en los aspectos teóricos de los espacios de *Sobolev,* mediante las *técnicas de estimación a priori* y los teoremas del *análisis funcional.*

5.2 SUGERENCIAS

A quienes pretendan mejorar la calidad educativa de Universidad Nacional del Santa; se pone a consideración esta investigación para que pueda servir como ayuda para otras investigaciones y se hace las siguientes recomendaciones:

- Realizar futuras investigaciones sobre existencia y solución de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, usando *métodos variacionales* y *métodos de diferencias finitas.*

- Extender el uso de los espacios de *Sobolev* a otros modelos de aplicación. Usar la *teoría de espacios de interpolación* de otros espacios funcionales tales como los de *Morrey*, BMO, *espacios de Rivera*, etc.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADAMS, R. (1975). *Sobolev Spaces*. Academic Press.

CLIMENT, B. (1995). *Soluciones Débiles y Renormalizadas de algunas Ecuaciones en Derivadas Parciales no Lineales con origen en Mecánica de Fluidos.*

CASTRO, F. (1997). *Curso básico de ecuaciones en derivadas parciales. Addison Wesley Iberoamericana.*

DOUBOVA, A. (1999). *Análisis y control de algunas EDP no lineales con origen en mecánica.*

GARRIDO, J. (2001). *Algunos resultados de existencia, unicidad y estabilidad para EDP funcionales estocásticas no lineales.*

GÓMEZ, M. (1997). *Estudio matemático de algunos problemas no lineales de la mecánica de fluidos incompresibles.*

ORTIZ, A. (2004). *Tópicos sobre ecuaciones en derivadas parciales.* Trujillo: UNT.

RAINARDY, R. (1999). *Partial Diferential Equation.* Springer Verlag.

ROBLES, J. (1995). *Contribución al estudio teórico de algunas ecuaciones en derivadas parciales no lineales relacionadas con fluidos no newtonianos.*

SUAREZ, A. (1998). *Propiedades de las Soluciones de Sistemas Estacionarios de la Dinámica de Poblaciones con Difusión Lineal y no Lineal.*

ANEXOS: ASPECTOS TEÓRICOS

A. ESPACIOS VECTORIALES

Espacio Vectorial

Definición. Dados un conjunto $V \neq \phi$, un cuerpo K ($\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$), $+ : V\,x\,V \to V$, y $* : K\,x\,V \to V$.

$(V, +, *)$ es llamado un *espacio vectorial sobre* K, si se verifican las siguientes propiedades: $\forall u, v, w \in V$; $\forall \alpha, \beta \in K$.

i. $u + v \in V$.

ii. $u + v = v + u$.

iii. $(u + v) + w = u + (v + w)$.

iv. $\exists!\, 0 \in V$, talque $u + 0 = u$.

v. $\exists!\, -u \in V$, talque $u + (-u) = 0$.

vi. $\alpha u \in V$.

vii. $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$.

viii. $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$.

ix. $(\alpha \beta) u = \alpha (\beta u)$.

x. $1 u = u$.

Ejemplos

Ejemplo 1

$F = \{ f : [\,0,1\,] \Rightarrow \mathbb{R},\ f \ continua \}$:Conjunto de funciones continuas en $[\,0,1\,]$.

Ejemplo 2

$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \}$: Conjunto de arreglos de n-dimensiones.

Ejemplo 3

$M^{mxn}(\mathbb{R})$: Conjunto de matrices de orden mxn.

Ejemplo 4

$S=\left\{\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}: x_n \in \mathbb{R}\right\}$: Conjunto de sucesiones de números reales.

Ejemplo 5

$Đ(\Omega)$: *Espacio de funciones de prueba con soporte compacto*, junto a las operaciones de adición y multiplicación escalar de funciones.

$u \in Đ(\Omega)$ si:

- $u \in C^{\infty}(\Omega)$, u es infinitamente diferenciable, con derivadas continuas de todos los órdenes sobre Ω.
- $spp(u) \subset K$, K compacto.

Conjunto convexo

Definición. Un subconjunto M de un espacio vectorial V, se llama *conjunto convexo* si $\forall x, y \in M, \forall \lambda \in \langle 0,1 \rangle$, se cumple que $\lambda x+(1-\lambda) y \in M$.

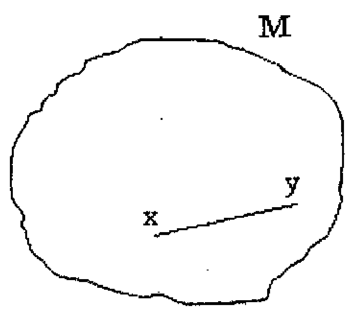

Figura A.1. Conjunto convexo

Transformaciones lineales

Definición. Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo campo K, y $T: V \to W$ una función. T se llama una *transformación lineal*, si cumple con las siguientes propiedades: $\forall u, v \in V$; $\forall \alpha \in K$.

i. $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

ii. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Ejemplo:

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$T(x,y) = (y,x)$$

B. ESPACIO CON PRODUCTO INTERNO O ESPACIO PRE-HILBERT

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Una aplicación $\langle \, , \rangle : V x V \to K$, es llamado producto interno, si cumple las siguientes propiedades: $\forall u, v, w \in V$; $\forall \alpha, \beta \in K$

i. $\langle u, u \rangle \geq 0$, y $\langle u, u \rangle = 0$ si y sólo sí $u = 0$.

ii. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, (para $K = \mathbb{C}$, $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$).

iii. $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$

$(V, \langle \, , \rangle)$ es llamado *espacio con producto interno* o *espacio pre-Hilbert*.

Ejemplos:

Ejemplo 1

$F = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R}, \ f \ continua \}$: Conjunto de funciones continuas en $[0,1]$.

Se define $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Ejemplo 2

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$: Conjunto de arreglos de n-dimensiones.

Se define $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ...x_ny_n$.

Funcionales lineales

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo K, una transformación lineal $T: V \to K$, se llama *funcional lineal*. Es decir, una *funcional lineal* es una transformación lineal de un espacio vectorial con producto interno V sobre el cuerpo K en el que está construido.

Ejemplo. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo K, $v_o \in V$, una función $f_{v_o}: V \to K$, definida como: $f_{v_o}(v) = \langle v, v_o\rangle$, $\forall v \in V$, es una funcional lineal, llamada *funcional multiplicación escalar* por v_o.

Demostración: $\forall u, v \in V$; $\forall \alpha \in K$

i. $f_{v_o}(u+v) = \langle u+v, v_o\rangle$

$$= \langle u, v_o\rangle + \langle v, v_o\rangle$$

$$= f_{v_o}(u) + f_{v_o}(v)$$

ii. $f_{v_o}(\alpha u) = \langle \alpha u, v_o\rangle$

$$= \alpha\langle u, v_o\rangle$$

$$= \alpha f_{v_o}(u)$$

De i) y ii) se tiene que f_{v_o} es una transformación lineal.

De donde se concluye que f_{v_o} es una funcional lineal.

Lema. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo K.

Si $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle, \quad \forall v \in V$, entonces $w_1 = w_2$.

Demostración

Por hipótesis tenemos $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle, \quad \forall v \in V$,

luego, $\langle v, w_1 \rangle - \langle v, w_2 \rangle = 0$

$$\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0.$$

Como la igualdad anterior se verifica $\forall v \in V$.

Haciendo $v = w_1 - w_2$, tenemos:

$$\langle w_1 - w_2, w_1 - w_2 \rangle = 0$$

$w_1 - w_2 = 0$, propiedad de producto interno.

$$w_1 = w_2.$$

Representación de *Riesz*

Teorema (de Representación de *Riesz*). Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo K de dimensión finita.

Si T es un funcional lineal sobre V, entonces existe un único $w_o \in V$ tal que $T(v) = \langle v, w_o \rangle, \quad \forall v \in V$.

El vector w_o, es llamado *representante de Riesz del funcional* T.

Demostración

Unicidad. Sean $w_1, w_2 \in V$ tales que $T(v) = \langle v, w_1 \rangle$ y $T(v) = \langle v, w_2 \rangle$

De donde se tiene que: $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle, \quad \forall v \in V$, por el lema anterior

de donde $w_1 = w_2$, es decir, que el representante de *Riesz* es único.

Existencia. Ahora debemos hallar $w_o \in V$ tal que $T(v) = \langle v, w_o \rangle, \quad \forall v \in V$

Es decir $T(v) = f_{w_o}(v), \quad \forall v \in V$.

Es suficiente determinar las coordenadas de w_o.

Consideremos la representación de w_o en una *base ortonormal*

$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V

$w_o = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$

Multiplicando en forma escalar se obtiene:

$\langle w_o, e_1 \rangle = a_1$

$\langle w_o, e_2 \rangle = a_2$

....

....

$\langle w_o, e_n \rangle = a_n$

Por otro lado:

$T(v) = \langle v; w_o \rangle$

$T(v) = \langle v, a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \rangle$

$= a_1 \langle v, e_1 \rangle + a_2 \langle v, e_2 \rangle + \dots + a_n \langle v, e_n \rangle$

En particular $v = e_i$

$T(e_i) = a_i \, , \forall i = 1..n$

Luego: $T(e_i) = \langle w_o, e_i \rangle$, $\forall i = 1..n$, son las coordenadas de w_o.

Esto es: $w_o = T(e_1)e_1 + T(e_2)e_2 + ... + T(e_n)e_n$.

C. ESPACIO NORMADO

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Una aplicación $\| , \| : V x V \to K$, es llamada una *norma*, si cumple las siguientes propiedades: $\forall u, v \in V$; $\forall \alpha \in K$

i. $\| u \| \geq 0$, y $\| u \| = 0$ si y solo si $u = 0$.

ii. $\| \alpha u \| = |\alpha| \| u \|$.

iii. $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$. (Desigualdad triangular).

$(V, \| \, , \, \|)$ es llamado *espacio normado.*

Observación. En un espacio con producto interno, se puede definir una norma de la siguiente forma: $\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Ejemplo

En $V = \mathbb{R}^n$, se definen las siguientes normas:

i. $\| x \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

ii. $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$.

iii. $\| x \|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} = \max \{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$.

Transformación lineal continua

Definición. Sean U y V dos espacios normados y $T:U \to V$, una transformación lineal, T es llamada transformación lineal continua, si y solo si existe una constante $M \geq 0$ tal que $\|Tu\| \leq M\|u\|, \forall u \in U$.

Nota. Utilizamos Tu para expresar $T(u)$.

Punto adherente

Definición. Sea V un espacio normado, $W \subset V$, y $a \in V$.

"a" es llamado *punto de adherencia* del conjunto W, si:

$B(a,\varepsilon)=\{x \in V : \|x-a\|<\varepsilon\}$ $\forall \varepsilon > 0$, contiene al menos un elemento de W.

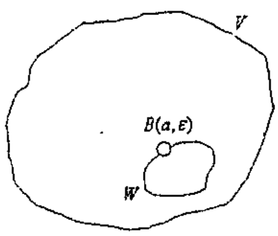

Figura C.1. Vecindad del punto a

$\overline{W}$ es llamado *conjunto de puntos de adherencia* de W.

Sucesiones de Cauchy

Definición. Sea V un espacio normado, una sucesión $(v_n)_{n\geq 1}$ de elementos de V es llamada sucesión de *Cauchy*, si $\forall \in > 0, \exists N_o \in \mathbb{N}$ talque $|v_m - v_n| < \in$ siempre que $m,n > N_o$.

Ejemplo. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ es una sucesión de *Cauchy*.

Definición. Un espacio normado V, se denomina completo si toda sucesión de *Cauchy* $(v_n)_{n\geq 1}$, $v_i \in V$ converge en V.

ESPACIOS DE BANACH

Definición. Un espacio normado completo V, se denomina espacio de Banach.

ESPACIOS DE HILBERT

Definición. Un espacio producto con interno completo V, se denomina *espacio de Hilbert*.

Funcional lineal continua

Definición. Sea V un espacio de *Hilbert* sobre $\mathbb{R}$. Una funcional lineal $T:V\to\mathbb{R}$, es continua, si $|T(v)|\leq\|T\|\|v\|,\ \forall v\in V,$ donde $\|T\|=\sup\limits_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}}\dfrac{T(v)}{\|v\|}$.

Funcional bilineal

Definición. Sea V un espacio de *Hilbert* sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $\beta:VxV\to\mathbb{R}$, es *funcional bilineal*, si es lineal en cada coordenada.

Es decir, $\beta(\alpha u+v,w)=\alpha\beta(u,w)+\beta(v,w)$.

$$\beta(u,\alpha v+w)=\alpha\beta(u,v)+\beta(u,w).$$

Diferencial

Definición. Sean V y W espacios de *Hilbert*, A un subconjunto abierto de V. Una aplicación $f:A\to W$ es diferenciable en $a\in A$, si existe una aplicación lineal y continua $Df(a):V\to W$ talque se verifica:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-Df(a).(x-a)}{\|x-a\|}=0$$

Nota. Si $V=\mathbb{R}^n$ y $W=\mathbb{R}^m$, $Df(a)$ es la *matriz jacobiana* de orden mxn.

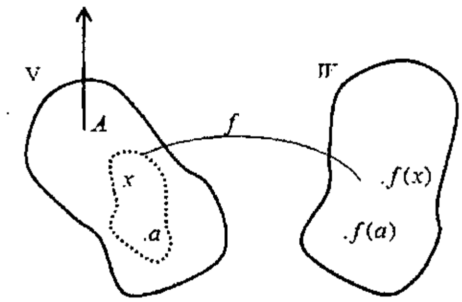

Figura C.2. Diferencial de una función

Derivada direccional

Definición. Sea V un espacio de *Hilbert*, $J:V\to K$ una funcional continua. La *derivada direccional de* J *en el punto* $a\in V$ *en la dirección de* $v\in V$, se define de la siguiente manera:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{J(a+\lambda v)-J(a)}{\lambda}$$

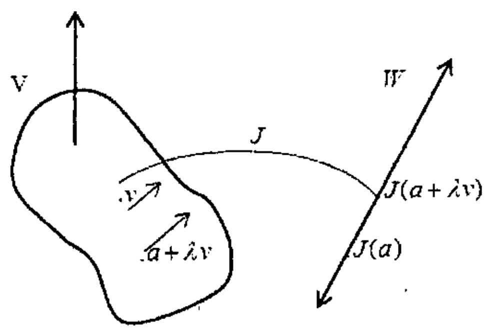

Figura C.3. Derivada direccional

D. TEORÍA DE LA MEDIDA

Definición(σ - Álgebra). Una colección M de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una σ - *álgebra* sobre el conjunto X, si verifica las siguientes propiedades:

i. $\Phi \in M$

ii. Si $A \in M \rightarrow A^c \in M$

iii. $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M \quad , \quad A_i \in M, i = 1, 2, \ldots$

Definición (Conjunto medible). Todo elemento A de una σ - álgebra M en X, es llamado conjunto medible en X.

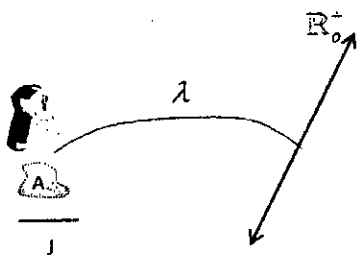

Figura D.1. Conjunto medible

Definición (Medida).- Sea M una σ - álgebra sobre un conjunto X, una función $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}_o^+$ es llamada una *medida*, si verifica las siguientes propiedades:

i. $\mu(A) \geq 0, \ \forall A \in M$.

ii. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad A_i \cap A_j = \phi, \quad \forall\, i \neq j.$

Definición. Sea X un espacio de medida. Se dice que φ es una *función escalar*, si existe una colección finita de conjuntos medibles y disjuntos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ y de números reales $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ talque:

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_i, & x \in A_i \\ 0, & x \notin A_1 \cup \ldots \cup A_n \end{cases}$$

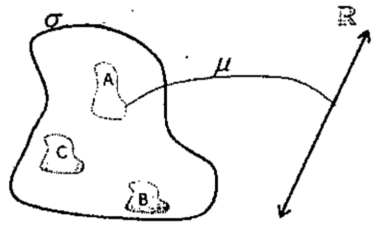

Figura D.2. Función escalar

MEDIDA DE LEBESGUE

En matemática, la *medida de Lebesgue* es la forma estándar de asignar una longitud, área o volumen a los subconjuntos del espacio euclideo.

Los conjuntos a los que se les puede asignar un tamaño, se denominan *Lebesgue medibles* o, simplemente, medibles $(\lambda : M \to \mathbb{R}_o^+)$.

Ejemplos

1. Si A es un intervalo cerrado $[a,b]$ su medida de *Lebesgue* es la longitud $b-a$, el intervalo $\langle a,b \rangle$ posee la misma medida dado que la diferencia entre los dos conjuntos tiene medida cero.
2. $A = [a,b]x[c,d]$ es un rectángulo cuya medida es el área $(b-a)(d-c)$.
3. El conjunto de *Cantor*, es un ejemplo de conjunto no numerable con medida de *Lebesgue* cero.

La medida de *Lebesgue* en $\mathbb{R}^n$, posee las siguientes propiedades:

i. Si $A = I_1 x I_2 x I_3 x \ldots x I_n$, $I_i, \forall i = 1 \ldots n.$ intervalo *Lebesgue* medible, se cumple $\lambda(A) = \lambda(I_1).\lambda(I_2)\ldots\lambda(I_n)$.

ii. Sean A y B *Lebesgue* medibles y $A \subseteq B$, se cumple $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

iii. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos *Lebesgue* medibles se cumple:

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ son *Lebesgue* medibles.

De lo anterior se puede resumir:

Los conjuntos *Lebesgue* medibles forman una σ - álgebra que incluye todos los productos de intervalos.

E. ESPACIO $L^2(\Omega)$

Definición. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Una función $u:\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *medible* si existe (u_n) de funciones escalares talque $u_n \rightarrow u$ a.e.

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi A .$$

$L^2(\Omega) = \left\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R},\ u\ medible,\ \int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty\right\}$ conjunto de funciones medibles.

$L^2(\Omega)$ es un espacio vectorial, llamado *espacio de funciones medibles de cuadrado integrable sobre* Ω.

$L^2(\Omega)$ es un *espacio con producto interno*, con el producto interno:

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx .$$

$L^2(\Omega)$ es un *espacio normado*, con la norma: $\| u \| = (\int_\Omega |u(x)|^2 dx)^{1/2}$.

$L^2(\Omega)$ es un *espacio de Banach*.

$L^2(\Omega)$ es un *espacio de Hilbert*.